SUR

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS ENTIÈRES DE GENRE ZÉRO

THÈSE POUR LE DOCTORAT

PRÉSENTÉE À LA FACULTÉ DES SCIENCES D'UPSAL

ET PUBLIQUEMENT SOUTENUE

LE 10 NOV. 1915 DÈS 10 HEURES DU MATIN

DANS L'AUDITOIRE DE L'INSTITUT DE PHYSIQUE

PAR

ARVID WAHLUND
UPL.

UPSAL 1915
IMPRIMERIE K. W. APPELBERG

SUR

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS ENTIÈRES DE GENRE ZÉRO

THÈSE POUR LE DOCTORAT

PRÉSENTÉE À LA FACULTÉ DES SCIENCES D'UPSAL

ET PUBLIQUEMENT SOUTENUE

LE 10 NOV. 1915 DÈS 10 HEURES DU MATIN

DANS L'AUDITOIRE DE L'INSTITUT DE PHYSIQUE

PAR

ARVID WAHLUND
UPL.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

UPSAL 1915
IMPRIMERIE K. W. APPELBERG

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41523708_0011

Dans une Note récente[1], M. Wiman a démontré le théorème suivant:

Étant donnée une fonction entière $F(z)$ d'ordre $\varrho < 1$ dont le module maximum soit $M(r)$ et le module minimum $m(r)$ pour $|z| = r$, on a pour une infinité de valeurs de r indéfiniment croissantes l'inégalité

$$m(r) > M(r)^{\cos \varrho_1 \pi},$$

ϱ_1 désignant un nombre tel que $\varrho < \varrho_1 < 1$.

Pour les fonctions d'ordre 0 et $\frac{1}{2}$ cette inégalité est moins précise. Nous voulons chercher quelles relations on peut trouver pour ces fonctions.

Les fonctions entières d'ordre zéro ont été étudiées par plusieurs auteurs parmi lesquels MM. Valiron[2] et Littlewood[3] ont trouvé les résultats les plus généraux. Pour le module minimum ces auteurs ont trouvé l'inégalité

$$m(r) > M(r)^{1-\varepsilon},$$

ε désignant un nombre arbitrairement petit.

---

[1] Wiman, Über eine Eigenschaft der ganzen Functionen von der Höhe Null, Math. Ann. 76 (1915) p. 197.

[2] Valiron, Sur les fonctions entières d'ordre nul, Math. Ann. 70 (1911) p. 471; voir id. Nouv. Ann. XI (1911) p. 448; Thèse, Paris (1914).

[3] Littlewood, On the asymptotic approximation to integral functions, Lond. Mat. Soc. Proc. (2) V (1907) p. 361; voir id. Cambr. Trans. (1909) p. 301.

J'ai déjà traité cette inégalité dans une Note[1] où j'ai cherché à préciser la croissance du nombre ε. Cependant, la méthode y employée ne conduisait pas au résultat le meilleur possible. Je vais reprendre cette question dans la première partie de ce travail. Dans la Note citée, j'ai aussi traité quelques classes de fonctions à croissance irrégulière. Les résultats trouvés nous ont suggéré à des recherches plus générales sur ce sujet. Celles-ci ont montré que la croissance de ε est étroitement liée à la croissance irregulière des zéros. C'est pourquoi je vais les mettre en première ligne. Dans la première partie j'étudierai aussi certaines classes de fonctions de genre zéro et d'ordre superieur à zéro à croissance irrégulière.

La deuxième partie est consacrée à l'étude du module minimum des fonctions d'ordre $\frac{1}{2}$ et à l'étude des fonctions d'ordre 1 qui se rattachent très étroitement à celles d'ordre $\frac{1}{2}$.

Dans la troïsième partie j'ai obtenu certaines relations entre le nombre des zéros dont le module est inférieur à r et le module maximum $M(r)$. Cependant, je me suis borné aux fonctions de genre zéro.

Dans tout ce qui suit nous désignerons le module maximum pour $|z| = r$ des fonctions entières $F(z)$, $F_1(z)$, $\overline{F}(z)$, ... par $M(r)$, $M_1(r)$, $\overline{M}(r)$, ... et le module minimum par $m(r)$, $m_1(r)$, $\overline{m}(r)$, ... De plus, nous désignerons par ε, ε', ... des nombres positifs fixes aussi petits que l'on voudra, par $\varepsilon(x)$ une fonction quelconque tendant vers zéro en même temps que $\frac{1}{x}$ et par $\varepsilon_\mu(x)$ $[\mu = 1, 2, \ldots]$ une fonction semblable mais déterminée.

---

[1] Sur le module minimum etc., Arkiv för Mat., Astr. och Fys. (1912).

I.

A. Théorème général sur les fonctions entières d'ordre zéro.

Soit r_n le module du $n^{\text{ième}}$ zéro d'une fonction entière d'ordre zéro. On sait qu'alors la série $\sum_1^\infty \frac{1}{r_n^\varepsilon}$ converge. En posant $r_n^{\sigma_n} = n$, on aura $\lim \sigma_n = 0$.

Pour étudier les fonctions entières d'ordre zéro, il faut régulariser la suite σ_n, et pour faire une étude tout à fait générale, il faut effectuer la régularisation de telle façon qu'elle comprenne toutes les fonctions.

M. Valiron a résolu ce problème par l'introduction de fonctions types. La nature des problèmes qu'il a traités est le plus souvent telle qu'il a été nécessaire de faire usage de fonctions continues. Ce n'est pas le cas pour les problèmes que nous traitons ici. C'est pourquoi nous allons nous servir de fonctions discontinues.

Avant de donner la définition de ces fonctions, considérons les fonctions entières d'ordre fini. Désignons par r_n le module du $n^{\text{ième}}$ zéro et posons $r_n^{\sigma_n} = n$. Soit $\lim_{n=\infty} \text{sup. } \sigma_n = \varrho$ et lim inf. $\sigma_n = \varrho'$. Comme on le sait, ϱ désigne alors l'ordre réel de la fonction. Dans le cas où $\varrho' = \varrho$, la fonction est à croissance régulière au sens de M. Borel. D'autre part, si $\varrho' < \varrho$, la fonction est à croissance irrégulière et ϱ' peut être regardé comme une mesure de l'irrégularité de la croissance des zéros.

Quelles sont les analogies à ϱ et à ϱ' pour les fonctions d'ordre zéro? Elles doivent être des fonctions d'une certaine variable, par exemple de n ou de r_n, qui tendent vers zéro en même temps que $\frac{1}{n}$ ou $\frac{1}{r_n}$. Posons r comme variable et qu'au nombre ϱ corresponde une fonction $\varrho_M(r)$, à ϱ' une fonction $\varrho_m(r)$; on doit avoir alors $\limsup_{n=\infty} \frac{\sigma_n}{\varrho_M(r_n)} = 1$, $\liminf_{n=\infty} \frac{\sigma_n}{\varrho_m(r_n)} = 1$. Nous voulons donner une définition plus distincte de ces fonctions. La voici.

1° *Elles sont définies pour des valeurs réelles et positives de* $x > x_0$ *et elles sont elles-mêmes réelles et positives.*

2° *Elles ne croissent jamais, lorsque* x *croît, et tendent vers zéro en même temps que* $\frac{1}{x}$.

3° $\varrho_M(r_n) \geq \sigma_n$ et $\varrho_m(r_n) \leq \sigma_n$ *pour tout* $n > n_0$.

4° $\varrho_M(r_n) = \sigma_n$ *et* $\varrho_m(r_n) = \sigma_n$ *pour des suites infinies de valeurs de* n*; nous appelons ces valeurs indices principaux.*

On comprend immédiatement que les conditions ci-dessus sont compatibles avec la définition donnée.

Mettons en évidence l'existence de telles fonctions. En ce qui concerne $\varrho_M(x)$ nous raisonnons de la manière suivante. Soit $n > n_0$, et considérons parmi tous les $n > n_0$ les valeurs des n pour lesquelles σ_n prend sa valeur maximum; choisissons-en la plus petite n_1 et la plus grande n'_1; alors $\sigma_{n_1} \geq \sigma_n$ pour $n_0 < n \leq n'_1$ et $\sigma_{n_1} > \sigma_n$ pour $n > n'_1$; σ_n tendant vers zéro, cela sera toujours possible. De la même manière on peut trouver deux indices, n_2 et n'_2, tels que $\sigma_{n_2} \geq \sigma_n$ pour $n'_1 < n \leq n'_2$ et $\sigma_{n_2} > \sigma_n$ pour $n > n'_2$. Ce procédé, on peut l'appliquer indefiniment et trouver ainsi les indices $n_3, \ldots . n_p, n_{p+1} \ldots .$ et $n'_3, \ldots . n'_p, n'_{p+1}, \ldots .$ tels que $\sigma_{n_{p+1}} \geq \sigma_n$ pour $n'_p < n \leq n'_{p+1}$ et $\sigma_{n_{p+1}} > \sigma_n$ pour $n > n'_{p+1}$. Posons ensuite

$$\begin{cases} \varrho_M(x) = \sigma_{n_1} & \text{pour } r_{n_0} < x < r_{n_2}, \\ \varrho_M(x) = \sigma_{n_p} & \text{pour } r_{n_p} \leq x < r_{n_{p+1}} \qquad [p = 2, 3, \ldots .] \end{cases}$$

Il est évident que la fonction $\varrho_M(x)$, ainsi définie, jouit des propriétés indiquées plus haut. Elle est aussi la plus grande de celles parmi les fonctions $\varrho_M(x)$ qui ont le plus grand nombre d'indices principaux.

L'existence d'une fonction $\varrho_m(x)$ peut être établie de la manière suivante. Considérons les valeurs de n dans l'intervalle $2 \leq n \leq n_0$ et choisissons-en un N_0 tel que $\sigma_{N_0} \leq \sigma_n$ pour tout $n \leq n_0$; σ_n tendant vers zéro, on a $\sigma_n < \sigma_{N_0}$ pour n suffisamment grand. Soit N_1 le plus petit indice n pour lequel $\sigma_n < \sigma_{N_0}$. On a alors $\sigma_{N_1} < \sigma_n$ pour $n_0 < n < N_1$. Ensuite on peut trouver des valeurs de $n > N_1$ telles que $\sigma_n < \sigma_{N_1}$. Soit N_2 l'indice le plus petit pour lequel cette inégalité est réalisée. On aura donc $\sigma_{N_2} < \sigma_n$ et $\sigma_{N_1} \leq \sigma_n$ pour $N_1 \leq n < N_2$. Ce procédé peut être répété indéfiniment et l'on pourra trouver une infinité d'indices $N_1, N_2, N_3, \ldots\ldots N_p, N_{p+1}, \ldots$ tels que $\sigma_{N_p+1} < \sigma_n$ et $\sigma_{N_p} \leq \sigma_n$ pour $N_p \leq n < N_{p+1}$. En posant

$$\begin{cases} \varrho_m(x) = \sigma_{N_0} \text{ pour } r_{n_0} < x \leq r_{N_1 - 1} \\ \varrho_m(x) = \sigma_{N_p} \text{ pour } r_{N_p - 1} < x \leq r_{N_{p+1} - 1} \; (p = 1, 2, 3 \ldots .), \end{cases}$$

il est évident que la fonction $\varrho_m(x)$, ainsi definie, jouit des propriétés indiquées plus haut. Elle est aussi la plus petite de celles parmi les fonctions $\varrho_m(x)$ qui ont le plus grand nombre d'indices principaux.

Voyons maintenant sous quelle forme le théorème de M. Wiman doit se présenter pour les fonctions entières d'ordre zéro. Pour une fonction entière d'ordre ϱ la série $\sum_1^\infty \frac{1}{r_n^{\varrho_1}}$ converge, si $\varrho_1 > \varrho$. Pour les fonctions d'ordre zéro on est donc conduit à croire que ϱ_1, figurant dans ce théorème, doit être remplacé par une fonction $\varepsilon(r)$, telle que la série $\sum_1^\infty \frac{1}{r_n^{\varepsilon(r_n)}}$ converge. Or, il est évident que la serie $\sum_1^\infty \frac{1}{r_n^{\varrho_M(r_n)}}$ diverge,

tandis que la série $\sum_1^\infty \frac{1}{r_n^{\varrho_M(r_n)\,(1+\varepsilon)}}$ converge, $\varrho_M(x)$ désignant la fonction que nous avons définie. On aurait donc à prendre $\varrho_M(r)\,(1+\varepsilon)$ au lieu de ϱ_1 dans le théorème de M. Wiman. Cependant ϱ_1 peut être remplacé par $\varrho_m(r)\,(1+\varepsilon)$, comme il suit du théorème que voici.

Pour les fonctions entières d'ordre zéro l'inégalité

$$(a) \qquad m(r) > M(r)^{\cos \varrho_m(r)\,(1+\varepsilon)\pi}$$

est vérifiée pour une infinité de valeurs de r indéfiniment croissantes.

Toute fonction entière d'ordre zéro, $F_1(z)$, dont le $i^{\text{ème}}$ zéro est $-a_i$ peut s'écrire sous la forme

$$F_1(z) = C\prod_1^\infty \left(1+\frac{z}{a_i}\right).$$

Sans restreindre la généralité, on peut prendre $C=1$.

Posons $|a_i| = r_i$ et formons la fonction

$$F(z) = \prod_1^\infty \left(1+\frac{z}{r_i}\right).$$

On a toujours

$$m_1(r) \geq \prod_1^\infty \left|1-\frac{r}{r_i}\right|;\quad M_1(r) \leq \prod_1^\infty \left(1+\frac{r}{r_i}\right)$$

$$m(r) = \prod_1^\infty \left|1-\frac{r}{r_i}\right|;\quad M(r) = \prod_1^\infty \left(1+\frac{r}{r_i}\right).$$

Si l'inegalité (a) est vérifiée pour $F(z)$, on aura une égalité correspondante pour $F_1(z)$. Alors il suffit de démontrer l'inégalité (a) pour les fonctions dont les zéros se trouvent sur l'axe réel négatif.

Pour démontrer l'inégalité (*a*) pour $F(z)$, nous allons nous servir de la méthode qu'a employée M. Wiman pour la démonstration du théorème mentionné, en y apportant quelques modifications.

Tout en suivant les idées de M. Wiman, introduisons une fonction $\overline{F}(z)$ et posons $m(r) = [M(r)]^K$, $\overline{m}(r) = [\overline{M}(r)]^{\overline{K}}$. *Supposons vérifiées les inégalités suivantes*

$$m(r) \geq \overline{m}(r) \tag{1}$$

$$\frac{m(r)}{M(r)} \geq \frac{\overline{m}(r)}{\overline{M}(r)}. \tag{2}$$

Alors il faut que $K \geq \overline{K}$.

En effet, en supposant $\overline{K} > 0$, on tire de ces inégalités

$$[M(r)]^K \geq [\overline{M}(r)]^{\overline{K}}$$

et

$$[M(r)]^{1-K} \leq [\overline{M}(r)]^{1-\overline{K}}$$

d'où

$$[\overline{M}(r)]^{\frac{K}{1-K}} \geq [\overline{M}(r)]^{\frac{\overline{K}}{1-\overline{K}}},$$

ce qui prouve notre assertion.

Il s'agit maintenant de trouver une fonction $\overline{F}(z)$ telle que $\overline{K} \geq \cos \varrho_m(r)\,(1+\varepsilon)\,\pi$ et que les inégalités (1) et (2) soient vérifiées pour une infinité de valeurs de r indéfiniment croissantes.

Désignons par N un indice principal de $\varrho_m(r)$ et posons

$$\overline{F}(z) = \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{z}{i^\lambda}\right),$$

$$\lambda = \frac{1}{\varrho_m(r_N)\,(1+\varepsilon')}.$$

Des résultats de M. Wiman[1] on déduira pour $r = \left(n + \frac{1}{2}\right)^{\lambda}$ les rélations suivantes

$$\log \overline{m}(r) > \frac{\pi r^{\frac{1}{\lambda}}}{\sin \frac{\pi}{\lambda}} \cos \frac{\pi}{\lambda} - \frac{\lambda \log 2\, \pi r^{\frac{1}{\lambda}}}{2} + \lambda \varepsilon_1(r).$$

et

$$\log \overline{M}(r) = \frac{\pi r^{\frac{1}{\lambda}}}{\sin \frac{\pi}{\lambda}} - \frac{\lambda \log 2\, \pi r^{\frac{1}{\lambda}}}{2} + \lambda \varepsilon_1(r).$$

Un calcul assez facile nous donne

$$\frac{\log \overline{m}(r)}{\log \overline{M}(r)} > \cos \frac{\pi\,(1 + \varepsilon'')}{\lambda}$$

ou

$$\overline{m}(r) > [\overline{M}(r)]^{\cos \varrho_m(r_N)\,(1+\varepsilon)\,\pi}, \tag{3}$$

inégalité valable pour tout $n > n_0$.

Il est évident que $\varrho_m(r_N)$, figurant dans (3), peut être remplacé par $\varrho_m(r)$ pour $r < r_N$, parce que $\varrho_m(x)$ est une fonction non croissante. Alors on a $\overline{K} > \cos \varrho_m(r)\,(1 + \varepsilon)\,\pi$. Reste donc à montrer les inégalités (1) et (2) pour une valeur $r = \left(n + \frac{1}{2}\right)^{\lambda} < r_N$.

Déterminons un indice N' tel que

$$\varrho_m(r_{N'}) > \varrho_m(r_N)\,(1 + \varepsilon'), \tag{4}$$

ce qui sera toujours possible en vertu des propriétés de $\varrho_m(x)$. On voit aussi que $N' < N$.

---

[1] Loc. cit. p. 199—201; voir id. Über die angenäherte Darstellung der ganzen Funktionen, Arkiv för Mat., Astr. o. Fys. I (1903) p. 109.

Ceci posé, écrivons

$$m(r) = \prod_{1}^{\infty} \left| 1 - \frac{r}{r_i} \right| = \prod_{1}^{N'} \cdot \prod_{N'+1}^{N} \cdot \prod_{N+1}^{\infty} = A_1 \cdot B_1 \cdot C_1;$$

$$\overline{m}(r) = \prod_{1}^{\infty} \left| 1 - \frac{r}{i^\lambda} \right| = \prod_{1}^{N'} \cdot \prod_{N'+1}^{N} \cdot \prod_{N+1}^{\infty} = \overline{A}_1 \cdot \overline{B}_1 \cdot \overline{C}_1;$$

$$\frac{m(r)}{M(r)} = \prod_{1}^{\infty} \left| \frac{1 - \frac{r}{r_i}}{1 + \frac{r}{r_i}} \right| = \prod_{1}^{N'} \cdot \prod_{N'+1}^{N} \cdot \prod_{N+1}^{\infty} = A_2 \cdot B_2 \cdot C_2;$$

$$\frac{\overline{m}(r)}{\overline{M}(r)} = \prod_{1}^{\infty} \left| \frac{1 - \frac{r}{i^\lambda}}{1 + \frac{r}{i^\lambda}} \right| = \prod_{1}^{N'} \cdot \prod_{N'+1}^{N} \cdot \prod_{N+1}^{\infty} = \overline{A}_2 \cdot \overline{B}_2 \cdot \overline{C}_2.$$

Les inégalités (1) et (2) sont satisfaites, dès que les produits A, B, C remplissent pour un r convenable les conditions suivantes:

$$\left.\begin{array}{ll} (5_1) & A_\mu > \overline{A}_\mu \\ (5_2) & B_\mu > \overline{B}_\mu \\ (5_3) & C_\mu > \overline{C}_\mu \end{array}\right\} (\mu = 1, 2).$$

En rappelant que $r = \left(n + \frac{1}{2}\right)^\lambda$, nous choisissons $N' \leq n \leq N - 1$. En tenant compte des propriétés de $\varrho_m(x)$, on conclut de l'inégalité (4) que $r_i < i^\lambda$ pour $2 \leq i \leq N'$; par choix convenable de l'origine on obtiendra aussi $r_1 < 1$. Alors on trouve $\frac{r}{r_i} > \frac{r}{i^\lambda}$ pour $i \leq N'$. Par suite, pour ces valeurs de i,

$$\frac{r}{r_i} - 1 > \frac{r}{i^\lambda} - 1, \qquad \frac{\frac{r}{r_i} - 1}{\frac{r}{r_i} + 1} > \frac{\frac{r}{i^\lambda} - 1}{\frac{r}{i^\lambda} + 1},$$

ce qui entraîne les inégalités (5_1).

Passons maintenant aux inégalités (5_3). En faisant usage des inégalités: $1 - x \geq e^{-2x}$, $\frac{1-x}{1+x} \geq e^{-3x}$ $\left[0 \leq x < \frac{1}{2}\right]$ et $1 - x \leq e^{-x}$, $\frac{1-x}{1+x} \leq e^{-2x}$ $[0 \leq x \leq 1]$, on aura

$$(6_1) \qquad C_1 > e^{-2r} \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{r_i},$$

$$(6_2) \qquad C_2 > e^{-3r} \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{r_i},$$

$$(7_1) \qquad \overline{C}_1 < e^{-r} \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{i^\lambda},$$

$$(7_2) \qquad \overline{C}_2 < e^{-2r} \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{i^\lambda}.$$

Posons

$$(8) \qquad h = E\left[r_N^{\varrho_N M(r_N)} + 1\right],$$

$E(x)$ désignant la partie entière de x, et ecrivons

$$(9) \qquad \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{r_i} = \sum_{N+1}^{h} \frac{1}{r_i} + \sum_{h+1}^{\infty} \frac{1}{r_i}.$$

Alors

$$(10) \qquad \sum_{N+1}^{h} \frac{1}{r_i} < \frac{h-N}{r_N} < \frac{h}{r_N}.$$

En vertu des propriétés de $\varrho_M(x)$ on aura

$$(11)\quad \sum_{h+1}^{\infty}\frac{1}{r_i}<\sum_{h+1}^{\infty} i^{-\frac{1}{\varrho_M(r_N)}}<\int_h^{\infty} x^{-\frac{1}{\varrho_M(r_N)}}\,dx<\frac{\varrho_M(r_N)}{1-\varrho_M(r_N)}\cdot\frac{h}{r_N}$$

et, d'après les relations (8), (9), (10) et (11)

$$(12)\quad \sum_{N+1}^{\infty}\frac{1}{r_i}<r_N^{-[1-\varrho_M(r_N)]}\cdot(1+\varepsilon).$$

De plus, tenant compte de la valeur de λ, nous trouverons

$$(13)\quad \sum_{N+1}^{\infty}\frac{1}{i^{\lambda}}>\frac{1}{(N+1)^{\lambda}}>r_N^{-(1-\varepsilon)}.$$

Des inégalités $(6_{1,2})$, $(7_{1,2})$, (12) et (13) nous tirons

$$C_\mu > \overline{C}_\mu \qquad [\mu = 1, 2],$$

ce qui prouve les inégalités (5_3).

Il reste à démontrer les inégalités (5_2) pour une valeur n, comprise entre N' et N. Tout d'abord elles peuvent être remplacées par

$$(5'_2)\quad \log B_\mu - \log \overline{B}_\mu \geq 0 \qquad [\mu = 1, 2].$$

Nous allons grouper les nombres r_i $[i = N'+1,\ N'+2, \ldots\ldots N]$.

Le premier groupe T_0 est composé des nombres qui satisfont à la condition $r_i < i^{\lambda}$ pour $N'+1 \leq i \leq N'+h_0$, tandis que $r_{N'+h_0+1} \geq (N'+h_0+1)^{\lambda}$. Supposons $r_i \geq i^{\lambda}$ pour $N'+h_0+1 \leq i \leq N'+h_0+h'_1$ et $r_{N'+h_0+h'_1+1} < (N'+h_0+1)^{\lambda}$; de la même manière $r_i < i^{\lambda}$ pour $N'+h_0+h'_1+1 \leq i \leq N'+h_0+h'_1+h_1$ et $r_{N'+h_0+h'_1+h_1+1} \geq (N'+h_0+h'_1+h_1+1)^{\lambda}$. Les nombres r_i $[i = N'+h_0+1, \ldots\ldots N'+h_0+h'_1+h_1]$ forment un deuxième groupe T_1. D'une manière analogue nous pouvons grouper les autres r_i jusqu'à ce que tous les r_i soient épuisés. Désig-

nons les autres groupes par $T_2, T_3, \ldots\ldots T_p, \ldots\ldots T_q$. Dans le dernier groupe T_q on a la seule relation $r_i \geq i^\lambda$, puisque $r_N > N^\lambda$.

Dans un T_p arbitraire, soit h'_p le nombre des $r_i \geq i^\lambda$ et h_p le nombre des $r_i < i^\lambda$. Désignons encore par $r^{(p)}$ un $r = \left(n + \frac{1}{2}\right)^\lambda$ où $n = N' + h_0 + h'_1 + h_1 + \ldots\ldots h'_p + h_p$.

Alors je dis que les inégalités $(5'_2)$ sont satisfaites au moins pour l'un des $r^{(p)}$ $[p = 0, 1, \ldots q-1]$.

Pour abréger, désignons par $B_\mu^{(p)}$ et $\overline{B}_\mu^{(p)}$ les produits des facteurs comprises respectivement dans B_μ et $\overline{B}_\mu$ et correspondant aux indices $N' + h_0 + \ldots + h_{p-1} + 1 \leq i \leq N' + h_0 + \ldots + h_p$. De plus, désignons par $\sum^{T_p}$ la somme $\sum_{N' + h_0 + \ldots h_{p-1} + 1}^{N' + h_0 + \ldots + h_p}$.

La condition $r_i < i^\lambda$ étant vérifiée pour les r_i qui entrent dans T_0, on trouve sans difficulté

$$\log B_\mu^{(0)} - \log \overline{B}_\mu^{(0)} > 0 \qquad [\mu = 1, 2] \tag{14}$$

pour tout $r \geq r^{(0)}$.

Choisissons ensuite un nombre ϱ_p dans l'intervalle

$$r_{N' + h_0 + \ldots + h'_p} \leq \varrho_p \leq r_{N' + h_0 + \ldots + h'_p + 1} \tag{15}$$

et posons

$$\sum^{T_p} \left(\frac{1}{i^\lambda} - \frac{1}{r_i}\right) = \Delta_p. \tag{16}$$

Désignons encore par r' un nombre $\leq r^{(p-1)}$ et par r'' un nombre $\geq r^{(p)}$.

Cela étant, considérons les deux sommes

$$S_p^{(1)} = \sum^{T_p} \left[\log\left(1 - \frac{r'}{r_i}\right) - \log\left(1 - \frac{r'}{i^\lambda}\right)\right], \tag{17_1}$$

$$S_p^{(2)} = \sum^{T_p} \left[\log\left(\frac{r''}{r_i} - 1\right) - \log\left(\frac{r''}{i^\lambda} - 1\right)\right]. \tag{17_2}$$

D'après la formule des accroissements finis on a

$$\log\left(1-\frac{r'}{r_i}\right)-\log\left(1-\frac{r'}{i^\lambda}\right)=\frac{r'\left(\frac{1}{i^\lambda}-\frac{1}{r_i}\right)}{1-\frac{r'}{r'_i}}, \tag{18}$$

r'_i désignant un nombre compris entre r_i et i^λ.

Or, pour tous les r_i qui figurent dans T_p,

$$\frac{r'\left(\frac{1}{i^\lambda}-\frac{1}{r_i}\right)}{1-\frac{r'}{r'_i}}>-\frac{r'\left(\frac{1}{i^\lambda}-\frac{1}{r_i}\right)}{1-\frac{r'}{\varrho_p}}. \tag{19}$$

En effet, d'après (15) la condition $\frac{1}{i^\lambda}-\frac{1}{r_i}\geq 0$ entraîne $r'_i\leq\varrho_p$. D'autre part, si $\frac{1}{i^\lambda}-\frac{1}{r_i}<0$, on aura pour les mêmes raisons $r'_i>\varrho_p$. Par suite, en remplaçant r'_i par ϱ_p, le membre gauche de (19) va diminuer algèbriquement et l'exactitude de (19) sera évidente.

En tenant compte des relations (16), (17_1), (18) et (19), nous trouvons

$$S_p^{(1)}>\frac{r'\Delta_p}{1-\frac{r'}{\varrho_p}} \tag{20_1}$$

et, d'une manière analogue,

$$S_p^{(2)}>-\frac{r''\Delta_p}{\frac{r''}{\varrho_p}-1}. \tag{20_2}$$

Considérons maintenant les sommes

$$\sum_p^{(1)}=\sum^{T_p}\left(\log\frac{1-\frac{r'}{r_i}}{1+\frac{r'}{r_i}}-\log\frac{1-\frac{r'}{i^\lambda}}{1+\frac{r'}{i^\lambda}}\right) \tag{21_1}$$

$$(21_2)\qquad \sum_p^{(2)} = \sum^{T_p}\left(\log\frac{\frac{r''}{r_i}-1}{\frac{r''}{r_i}+1} - \log\frac{\frac{r''}{i^\lambda}-1}{\frac{r''}{i^\lambda}+1}\right)$$

Employant de nouveau la formule des accroissements finis, nous obtenons

$$(22)\qquad \log\frac{1-\frac{r'}{r_i}}{1+\frac{r'}{r_i}} - \log\frac{1-\frac{r'}{i^\lambda}}{1+\frac{r'}{i^\lambda}} = \frac{2\,r'\left(\frac{1}{i^\lambda}-\frac{1}{r_i}\right)}{1-\left(\frac{r'}{r'_i}\right)^2},$$

r'_i désignant toujours un nombre entre r_i et i^λ, mais qui peut différer du nombre r'_i précédent.

Par des raisonnements tout analogues à ceux qui conduisirent à (19) nous pouvons trouver pour tous les r_i figurant dans T_p

$$(23)\qquad \frac{2\,r'\left(\frac{1}{i^\lambda}-\frac{1}{r_i}\right)}{1-\left(\frac{r'}{r'_i}\right)^2} > \frac{2\,r'\left(\frac{1}{i^\lambda}-\frac{1}{r_i}\right)}{1-\left(\frac{r'}{\varrho_p}\right)^2}.$$

En vertu des relations (16), (21_1), (22) et (23), on a dès lors

$$(24_1)\qquad \sum_p^{(1)} > \frac{2\,r'\Delta_p}{1-\left(\frac{r'}{\varrho_p}\right)^2}.$$

D'une manière analogue on trouve

$$(24_2)\qquad \sum_p^{(2)} > -\frac{2\,r''\Delta_p}{\left(\frac{r''}{\varrho_p}\right)^2-1}.$$

Nous faisons maintenant usage du théorème auxiliaire suivant.

En supposant

$$\sigma_\nu = \sum_1^\nu \delta_j \geq 0 \qquad [\nu = 1, 2, 3, \ldots . \varrho]$$

et

$$\sigma_{\varrho+1} < 0$$

et en désignant par $c_1, c_2, \ldots c_j, \ldots .$ *une suite de nombres positifs et non croissants et par* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots . \gamma_j \ldots$ *une suite de nombres positifs et non décroissants, on a*

$$\sum_1^\nu c_j \delta_j \geq 0 \qquad [\nu = 1, 2, 3, \ldots . \varrho]$$

et

$$\sum_1^{\varrho+1} \gamma_j \delta_j < 0 .$$

En effet, on peut écrire

$$\sum_1^\nu c_j \delta_j = c_\nu \sigma_\nu + \sum_1^{\nu-1} (c_j - c_{j+1}) \sigma_i$$

et

$$\sum_1^{\varrho+1} \gamma_j \delta_j = \gamma_{\varrho+1} \sigma_{\varrho+1} - \sum_1^{\varrho} (\gamma_{\varrho+1} - \gamma_j) \delta_j ,$$

ce qui prove le théorème.

Ces développements faits, supposons que

$$\sum_1^\nu \Delta_j \geq 0 \qquad [\nu = 1, 2, 3, \ldots . \varrho]; \tag{25}$$

les nombres ϱ_p croissant en même temps que p, on comprend que les nombres $\dfrac{1}{1 - \dfrac{r^{(0)}}{\varrho_p}}$ et $\dfrac{1}{1 - \left(\dfrac{r^{(0)}}{\varrho_p}\right)^2}$ présentent des suites décroissantes, lorsque p croît. Dès lors, en tenant compte du théorème auxiliaire et des relations (17_1), (20_1), (21_1) et (24_1), on arrive au résultat

$$\sum_{p=1}^{\varrho} (\log B_\mu^{(p)} - \log \overline{B}_\mu^{(p)}) > 0 \qquad [\mu = 1, 2] \tag{26}$$

pour $r = r' = r^{(0)}$.

Si $\varrho = q$, les relations (14) et (26) entraînent l'exactitude des inegalités $(5'_2)$ pour $r = r^{(0)}$. D'autre part, si l'on a $\varrho < q$, on doit avoir $\Delta_{\varrho+1} < 0$. Soit $\Delta_p < 0$ pour $\varrho + 1 \leq p \leq h$ où toutefois $h \leq q - 1$, car, d'après une remarque que nous avons faite sur le groupe T_q on comprend que $\Delta_q > 0$, et que, par suite, $h \leq q - 1$. Posons $r = r'' = r^{(h)}$. Comme les nombres ϱ_p croissent en même temps que p, il faut que $\dfrac{1}{\dfrac{r^{(h)}}{\varrho_p} - 1}$ et $\dfrac{1}{\left(\dfrac{r^{(h)}}{\varrho_p}\right)^2 - 1}$ présentent des suites croissantes, lorsque p croît. Il en résulte, en tenant compte du théorème auxiliaire et des relations (20_2), (24_2) et (25),

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_1^{\varrho+1} S_p^{(2)} \\ \displaystyle\sum_1^{\varrho+1} \Sigma_p^{(2)} \end{array} \right\} > 0 \qquad [r'' \geq r^{(h)}] \tag{27}$$

De plus, comme $\Delta_p < 0$ pour $\varrho + 2 \leq p \leq h$, on aura en vertu de (20_2) et de (24_2)

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{\varrho+2}^{h} S_p^{(2)} \\ \displaystyle\sum_{\varrho+2}^{h} \Sigma_p^{(2)} \end{array} \right\} > 0 \qquad [r'' \geq r^{(h)}]. \tag{28}$$

Par suite, d'après (17_2), (21_2), (27) et (28), nous obtenons pour $r \geq r^{(h)}$

$$\sum_1^h (\log B_\mu^{(p)} - \log \overline{B}_\mu^{(p)}) > 0 \qquad [\mu = 1, 2] \tag{29}$$

Si l'on a $h = q - 1$ ou, plus généralement, si

$$\sum_{h+1}^{\nu} \Delta_j \geq 0 \qquad [\nu = h+1,\ h+2, \ldots q], \tag{30}$$

il suit des relations (14), (29) et (26), en y remplaçant ϱ par q et 1 par $h + 1$, que les inégalités $(5'_2)$ sont vraies pour $r = r^{(h)}$.

Si la condition (30) n'est pas remplie, on pourra répéter le procédé jusqu'a ce qu'on arrive à un h vérifiant la relation (30) qui, elle-même, est vérifiée toujours pour $h = q - 1$. Ainsi notre théorème est démontré.

B. Sur certaines classes des fonctions entières d'ordre zéro pour lesquelles le théorème général peut être précisé.

Commençons par chercher une représentation asymptotique du module de la fonction[1]

$$f(z) = \prod_{1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{e^{\alpha(n)}}\right)$$

où la fonction $\alpha(x)$ jouit des propriétés suivantes.

1° $\alpha(x)$ *est définie pour des valeurs réelles et positives de* x *et elle est, elle-même, réelle et positive.*

2° $\alpha(x)$ *est une fonction continue ayant des dérivées des deux premiers ordres.*

3° *La fonction* $x\alpha'(x)$ *est toujours positive et augmente, lorsque* x *croît, et* $\lim_{x=\infty} x\alpha'(x) = \infty$.

4° *En posant* $x\alpha'(x) = \psi(x)$, *on a toujours* $\lim_{x=\infty} \frac{x\psi'(x)}{\psi(x)} = l$, $0 \leqq l < C$, C *désignant une constante finie.*

5° *La fonction* $\frac{x\alpha'(x) \log x}{\alpha(x) \log \alpha(x)}$ *présente une variation monotone, et* $\lim \frac{x\alpha'(x) \log x}{\alpha(x) \log \alpha(x)} = l'$, $0 \leq l' \leqq 1$.

---

[1] Cette fonction a été aussi traitée par M. Littlewood dans le mémoire précité (Cambr. Trans. p. 301 et suivantes). Cependant il s'est servi d'une autre méthode. De plus, il me semble que son résultat est inexact dans certains cas.

Posons

$$z = re^{\varphi i} = e^{a(N+\theta)}\, e^{\varphi i},$$

N désignant un nombre entier et $0 \leq \theta < 1$.

Alors nous pouvons écrire

$$(31) \qquad \left\{ \log |f(z)| = \sum_1^N \log \frac{r}{e^{a(n)}} + \sum_1^N \log \left| 1 + e^{-\varphi i} \frac{e^{a(n)}}{r} \right| + \right.$$

$$+ \sum_{N+1}^{\infty} \log \left| 1 + e^{\varphi i} \frac{r}{e^{a(n)}} \right| = A + B + C.$$

On trouve immédiatement

$$(32) \qquad A = N\, a(N+\theta) - \sum_1^N a(n).$$

Du 3° on voit que $a(x)$ croît toujours, et nous pouvons poser

$$\sum_1^N a(n) = \int_{\delta_1}^{N+\delta_2} a(x)\, dx \qquad 0 < \left\{ \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{matrix} \right\} < 1$$

d'où, en intégrant par parties,

$$\sum_1^N a(n) = (N+\delta_2)\, a(N+\delta_2) - \delta_1\, a(\delta_1) - \int_{\delta_1}^{N+\delta_2} x a'(x)\, dx.$$

En vertu des propriétés de la fonction $a(x)$ et en vertu de (32), nous en tirons

$$A = [1 + \varepsilon(N)] \int_{\delta_1}^{N+\theta} \psi(x)\, dx.$$

En intégrant de nouveau par parties et en tenant compte du 4°, on trouvera

$$(33) \qquad A = [1 + \varepsilon(N)] \frac{(N+\theta)\, \psi(N+\theta)}{1+l}$$

Pour évaluer les sommes $B+C$, considérons d'abord les sommes

$$(34) \qquad B_1 + C_1 = \sum_1^N \log \left| 1 + e^{-\varphi i} \left(\frac{n}{N+\theta} \right)^{\psi(N+\Theta)} \right| +$$

$$+ \sum_{N+1}^{\infty} \log \left| 1 + e^{\varphi i} \left(\frac{N+\theta}{n} \right)^{\psi(N+\Theta)} \right|$$

et les intégrales

$$I_1 + I_2 = \int_0^{N+\Theta} \log \left| 1 + e^{-\varphi i} \left(\frac{x}{N+\theta} \right)^{\psi(N+\Theta)} \right| dx$$

$$+ \int_{N+\Theta}^{\infty} \log \left| 1 + e^{\varphi i} \left(\frac{N+\theta}{x} \right)^{\psi(N+\Theta)} \right| dx.$$

En posant dans I_1

$$u = \left(\frac{x}{N+\theta} \right)^{\psi(N+\Theta)},$$

et dans I_2

$$u = \left(\frac{N+\theta}{x} \right)^{\psi(N+\Theta)},$$

il résulte

$$I_1 + I_2 = \frac{N+\theta}{\psi(N+\theta)} \left[\int_0^1 \log \left| 1 + ue^{-\varphi i} \right| u^{\frac{1}{\psi(N+\Theta)} - 1} du + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 \log \left| 1 + ue^{+\varphi i} \right| u^{-\frac{1}{\psi(N+\Theta)} - 1} du \right]$$

En développant en série, on trouve

$$I_1+I_2=\frac{N+\theta}{\psi(N+\theta)}\int_0^1\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu}\left(u^{\nu+\frac{1}{\psi(N+\theta)}-1}+u^{\nu-\frac{1}{(\psi N+\theta)}-1}\right)\cos\nu\varphi\right]du$$

$$=\frac{2\,(N+\theta)}{\psi\,(N+\theta)}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}\cos\nu\varphi}{\nu^2-\left[\frac{1}{\psi(N+\theta)}\right]^2}.$$

La dernière somme peut être évaluée à l'aide de la formule [1]

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}\cos\nu\varphi}{\nu^2-x^2}=-\frac{1}{2\,x^2}+\frac{\pi\cos\varphi x}{2\,x\sin\pi x},\qquad -\pi\leq\varphi\leq\pi.$$

Nous trouvons donc

$$I_1+I_2=(N+\theta)\left(\frac{\pi\cos\dfrac{\varphi}{\psi\,(N+\theta)}}{\sin\dfrac{\pi}{\psi(N+\theta)}}-\psi(N+\theta)\right). \tag{35}$$

Concernant la différence $I_1+I_2-B_1-C_1$, on trouve sans difficulté

$$|\,I_1+I_2-B_1-C_1\,|<c\left|\log\frac{\delta}{(N+\theta)^{\psi(N+\theta)}}\right|, \tag{36}$$

c désignant une constante finie et δ la plus petite des quantités: $|\,(N+\theta)^{\psi(N+\theta)}e^{\varphi i}-n^{\psi(N+\theta)}\,|$ $[n=1,\,2,\,N,\,N+1,\,\ldots]$.

Cela fait, évaluons la différence

$$|\,B+C-B_1-C_1\,|=\Delta. \tag{37}$$

On peut écrire

$$\Delta\leq|\,B-B_1\,|+|\,C_1-C\,|=\Delta_B+\Delta_C.$$

---

[1] Voir: Lindelöf, Le calcul des résidus p. 55.

Des formules (31) et (34) on déduit

$$(38_1)\quad \Delta_B \leq \sum_1^N \left| \log \left| 1 + e^{-\varphi i}\, \frac{e^{a(n)-a(N+\Theta)} - e^{[\log n - \log(N+\Theta)]\,\psi(N+\Theta)}}{1 + e^{-\varphi i}\, e^{[\log n - \log(N+\Theta)]\,\psi(N+\Theta)}} \right| \right|$$

et (38_2)

$$\Delta_C \leq \sum_{N+1}^{\infty} \left| \log \left| 1 + e^{\varphi i}\, \frac{e^{-[\log n - \log(N+\Theta)]\,\psi(N+\Theta)} - e^{-[a(n)-a(N+\Theta)]}}{1 + e^{\varphi i}\, e^{-[a(n)-a(N+\Theta)]}} \right| \right|$$

En supposant $|u| \leq u_1 < 1$, il est évident que $u_1 \geq |u| \geq \log(1+|u|) \geq \log|1+u| \geq \log(1-|u|) \geq \frac{-|u|}{1-|u|} \geq \frac{-u_1}{1-u_1}$.

Cela entraîne

$$(39)\qquad \left|\log|1+u|\right| \leq \frac{u_1}{1-u_1}.$$

Montrons maintenant que les expressions $e^{a(n)-a(N+\Theta)} - e^{[\log n - \log(N+\Theta)]\,\psi(N+\Theta)}$ $[n = 1, 2, \ldots N]$ et $e^{-[\log n - \log(N+\Theta)]\,\psi(N+\Theta)} - e^{-[a(n)-a(N+\Theta)]}$ $[n = N+1, N+2, \ldots]$ sont positives. En effet, on a toujours

$$(40)\qquad \begin{cases} a(n) - a(N+\theta) = a(e^{\log n}) - a(e^{\log(N+\Theta)}) = \\ \quad = [\log n - \log(N+\theta)]\, a'(e^{\log \bar{n}})\, \bar{n} = \\ \quad\quad = [\log n - \log(N+\theta)]\, \psi(\bar{n}), \end{cases}$$

$\bar{n}$ étant compris entre $N+\theta$ et n. On en voit que notre assertation est exacte.

De là, en tenant compte de $(38_{1,\,2})$ et de (39), on déduit

$$(41_1)\quad \Delta_B \leq \sum_1^N \frac{e^{a(n)-a(N+\Theta)} - e^{[\log n - \log(N+\Theta)]\,\psi(N+\Theta)}}{1 - e^{a(n)-a(N+\Theta)}} = \sum_1^N \delta_n$$

et

$$(41_2)\quad \Delta_C \leq \sum_{N+1}^{\infty} \frac{e^{-[\log n - \log(N+\Theta)]\,\psi(N+\Theta)} - e^{-[a(n)-a(N+\Theta)]}}{1 - e^{-[\log n - \log(N+\Theta)]\,\psi(N+\Theta)}} = \sum_{N+1}^{\infty} \delta_n.$$

Si $\theta = 0$, le $N^{\text{ième}}$ terme dans (41_1) n'a pas de sens, mais en choisissant dans ce cas $\varphi \neq \pm \pi$, ce terme sera égal à 0 dans (38_1); par suite, on pourra l'exclure dans (41_1).

Pour trouver une limite supérieure de Δ_B, écrivons

$$\sum_1^N \delta_n = \sum_1^{n_1} \delta_n + \sum_{n_1+1}^N \delta_n = \sigma_1 + \sigma_2$$

où

$$n_1 = E\left[(N+\theta)\, e^{-\frac{2\log\psi(N+\Theta)}{\psi(N+\Theta)}}\right] \tag{42}$$

La fonction $a(x)$ étant croissante, on a pour tout $n \leq n_1$

$$a(N+\theta) - a(n) \geq a(N+\theta) - a(n_1) = \Delta_{n_1}.$$

En faisant usage de (40) et de (42), nous obtenons

$$\Delta_{n_1} > \frac{2\log\psi(N+\theta)}{\psi(N+\theta)} \cdot \psi(\bar{n}) \qquad [n_1 < \bar{n} < N+\theta]$$

d'où, la fonction $\psi(x)$ étant croissante,

$$\Delta_{n_1} > 2\log\psi(N+\theta) \cdot \frac{\psi(n_1)}{\psi(N+\theta)}.$$

D'autre part, en vertu de la formule des accroissements finis

$$\psi(N+\theta) - \psi(n_1) = (N+\theta-n_1)\,\psi'(\bar{N}) =$$

$$= \frac{N+\theta-n_1}{\bar{N}} \cdot \frac{\bar{N}\psi'(\bar{N})}{\psi(\bar{N})} \cdot \frac{\psi(\bar{N})}{\psi(N+\theta)} \cdot \psi(N+\theta).$$

De là, en tenant compte des propriétés de $\psi(x)$ et de l'égalité (42), et en se rappelant que $n_1 < \bar{N} < N+\theta$, on arrive aux inégalités

$$\psi(N+\theta) - \psi(n_1) < C\psi(N+\theta)\left[e^{\frac{2\log\psi(N+\Theta)}{\psi(N+\Theta)}} - 1\right] \tag{43}$$

et

$$\frac{\psi(n_1)}{\psi(N+\theta)} > \left[1 - \frac{2\log\psi(N+\theta)}{\psi(N+\theta)} \cdot C(1+\varepsilon(N)\right] > 1-\varepsilon. \tag{43'}$$

Par conséquent,

$$\Delta_{n_1} > 2(1-\varepsilon)\log\psi(N+\theta),$$

et, pour $n \leq n_1$

$$\delta_n < \frac{1+\varepsilon}{[\psi(N+\theta)]^{2(1-\varepsilon)}} < \frac{1}{[\psi(N+\theta)]^{\beta}} \qquad [2>\beta>1]$$

Donc:

$$\sigma_1 < \frac{n_1}{[\psi(N+\theta)]^{\beta}} < \frac{N+\theta}{[\psi(N+\theta)]^{\beta}}.$$

Pour évaluer σ_2, écrivons pour $n_1 < n \leq N$

$$\delta_n = \frac{1-e^{[\log n-\log(N+\Theta)](\psi(N+\Theta)-\psi(\bar{n}))}}{e^{\psi(\bar{n})[\log(N+\Theta)-\log n]}-1} \qquad [n<\bar{n}<N+\theta].$$

Pour $n > n_1$, on a

$$\gamma_n = [\log(N+\theta)-\log n][\psi(N+\theta)-\psi(\bar{n})] <$$

$$< \log\left(\frac{N+\theta}{n_1+1}\right)[\psi(N+\theta)-\psi(n_1)]$$

d'où, à l'aide de (42) et de (43),

$$\gamma_n < \frac{4C[\log\psi(N+\theta)]^2}{\psi(N+\theta)}[1+\varepsilon] = \varepsilon(N).$$

Soient c_1 et c_2 des nombres positifs et $c_1 < \varepsilon$; on a toujours

$$\frac{1-e^{-c_1}}{e^{c_2}-1} < \frac{c_1(1+\varepsilon)}{c_2}.$$

Par conséquent, pour $n_1 < n \leq N$,

$$\delta_n < \frac{\psi(N+\theta)-\psi(\bar{n})}{\psi(\bar{n})}[1+\varepsilon].$$

Observant que $N+\theta > \bar{n} > n_1$, on en conclut à l'aide de (43) et de (43′)

$$\delta_n < \frac{2C\log\psi(N+\theta)}{\psi(N+\theta)}[1+\varepsilon] \qquad [n_1 < n \leq N]$$

d'où, avec emploi de (42),

$$\sigma_2 < 4C(N+\theta)\left[\frac{\log\psi(N+\theta)}{\psi(N+\theta)}\right]^2[1+\varepsilon] < \frac{N+\theta}{[\psi(N+\theta)]^\beta}\,[2>\beta>1].$$

Donc:

$$\Delta_B < \frac{N+\theta}{[\psi(N+\theta)]^{\gamma_1}} \qquad [2>\gamma_1>1].$$

Pour évaluer Δ_C, nous procédons d'une manière analogue. Nous écrivons

$$\sum_{N+1}^{\infty}\delta_n = \sum_{N+1}^{n_2}\delta_n + \sum_{n_2+1}^{\infty}\delta_n = \sigma'_2 + \sigma'_1,$$

en choisissant

$$n_2 = E\left[(N+\theta)\,e^{\frac{2\log\psi(N+\theta)}{\psi(N+\theta)}}\right]. \tag{44}$$

Pour $n > n_2$, on a

$$\delta_n < \frac{e^{-[\log n - \log(N+\theta)]\,\psi(N+\theta)}}{1-e^{-[\log n-\log(N+\theta)]\,\psi(N+\theta)}} < \frac{e^{-[\log n-\log(N+\theta)]\,\psi(N+\theta)}}{1-e^{-[\log n_2-\log(N+\theta)]\,\psi(N+\theta)}}$$

ou, en vertu de (44),

$$\delta_n < [1+\varepsilon]\left(\frac{N+\theta}{n}\right)^{\psi(N+\theta)}.$$

Cela donne

$$\sigma'_1 < [1+\varepsilon]\sum_{n_2+1}^{\infty}\left(\frac{N+\theta}{n}\right)^{\psi(N+\theta)} < [1+\varepsilon]\,(N+\theta)^{\psi(N+\theta)}\int_{n_2}^{\infty}\frac{dx}{x^{\psi(N+\theta)}} <$$

$$< [1+\varepsilon']\frac{n_2}{\psi(N+\theta)}\left(\frac{N+\theta}{n_2}\right)^{\psi(N+\theta)}$$

et, à l'aide de (44),

$$\sigma'_1 < \frac{N+\theta}{[\psi(N+\theta)]^{\beta_1}} \qquad [3>\beta_1>1].$$

Par un procédé tout analogue à celui que nous avons employé pour évaluer σ_2, on trouvera

$$\sigma'_2 < \frac{N+\theta}{[\psi(N+\theta)]^{\beta_2}} \qquad [2 > \beta_2 > 1]$$

et par conséquent

$$\Delta_C < \frac{N+\theta}{[\psi(N+\theta)]^{\gamma_2}} \qquad [2 > \gamma_2 > 1].$$

En réunissant ces résultats, nous obtenons

$$\Delta < \frac{N+\theta}{[\psi(N+\theta)]^{\gamma}} \qquad [2 > \gamma > 1] \tag{45}$$

Dès lors, les formules (35), (36), (37) et (45) nous donnent définitivement

$$B + C = (N+\theta)\left(\frac{\pi \cos \dfrac{\varphi}{\psi(N+\theta)}}{\sin \dfrac{\pi}{\psi(N+\theta)}} - \psi(N+\theta)\right) + R(N, \varphi) \tag{46}$$

où

$$|R(N, \varphi)| < c\left|\log \frac{\delta}{(N+\theta)^{\psi(N+\theta)}}\right| + \frac{N+\theta}{[\psi(N+\theta)]^{\gamma}}. \tag{46'}$$

Des formules (31), (33), (46) et (46') on peut déduire une représentation asymptotique de $|f(z)|$. Cependant, nous allons nous borner à considérer les valeurs extrêmes de $|f(z)|$.

Soit alors $\overline{M}(r)$ le maximum et $\overline{m}(r)$ le minimum de $|f(z)|$ pour $|z| = r = e^{\alpha(N+\theta)}$; soit, de plus, $\theta \neq 0$. Nous distinguerons divers cas suivant la valeur de $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{\psi(x)}{x}$.

Premier cas. $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{\psi(x)}{x} = 0.$

A l'aide des formules (31), (33), (46) et (46'), nous trouvons par des calculs assez faciles

$$\log \overline{m}(r) = [1 + \varepsilon_1(N)] \frac{N+\theta}{(1+l)\sin\dfrac{\pi}{\psi(N+\theta)}}\left[1 - \frac{\pi^2(1+l)\,[1+\varepsilon(N)]}{2\,[\psi(N+\theta)]^2}\right]$$

$$\log \overline{M}(r) = [1 + \varepsilon_1(N)] \frac{N+\theta}{(1+l)\sin\dfrac{\pi}{\psi(N+\theta)}}\left[1 + \frac{\varepsilon(N)}{[\psi(N+\theta)]^2}\right]$$

d'où

$$\frac{\log \overline{m}(r)}{\log \overline{M}(r)} = 1 - \frac{\pi^2(1+l)\,[1+\varepsilon(N)]}{2\,[\psi(N+\theta)]^2} = \cos\left[\frac{\pi\sqrt{1+l}}{\psi(N+\theta)}\,[1+\varepsilon(N)]\right],$$

égalité qu'on peut aussi écrire

$$(b') \qquad \overline{m}(r) = [\overline{M}(r)]^{\cos\left(\frac{\pi\sqrt{1+l}}{\psi(N+\theta)}\,[1+\varepsilon(N)]\right)}$$

Pour décider, dans quels cas la relation (a) peut se préciser, on doit comparer (a) à (b'), en cherchant le rapport de $\dfrac{\sqrt{1+l}}{\psi(N+\theta)}$ à $\varrho_m(r)$. Soit ce rapport $\lambda(r)$, ou $\mu(x)$, selon qu'on le regarde comme une fonction de r ou de x, étant posé $e^{\alpha(x)} = r$.

Des propriétés de $\alpha(x)$ on déduit facilement

$$\varrho_m(r) = \frac{\log x}{\alpha(x)}\,[1+\varepsilon(x)]$$

d'où, à un facteur $1+\varepsilon(r)$ près,

$$(47) \qquad \lambda(r) = \mu(x) = \frac{\alpha(x)\sqrt{1+l}}{\psi(x)\log x}$$

Étudions donc la fonction $\mu(x)$ et supposons d'abord $l = 0$ d'où l'on peut déduire d'ailleurs $\alpha(x) = x^{\varepsilon(x)}$.

Du 3°, on tire sans difficulté $\mu(x) < 1$ pour tout x, mais il peut arriver que $\lim_{x=\infty} \mu(x) = 1$. Dans ce cas, une précision est impossible. Il est évident que l'on aura

$$\frac{xa'(x)\log x}{a(x)} = 1 + \varepsilon(x)$$

ce qui entraîne

$$a(x) = (\log x)^{1+\varepsilon(x)}.$$

De là on voit que *l'inégalité* (*a*) *ne peut pas être précisée en général pour les fonctions dont les modules des zéros croissent moins vite que* $e^{(\log n)^{1+\varepsilon}}$.

D'autre part, pour

(a_1) $$a(x) = (\log x)^{\beta_1} \qquad [\beta_1 > 1],$$

on a

(λ_1) $$\mu(x) = \frac{1}{\sigma} = \lambda(r)$$

et, pour

(a_2) $$a(x) = e^{(\log)_2 x)^{\beta_2}} \qquad [\beta_2 > 1],$$

(λ_2) $$\mu(x) = \frac{1}{\beta_2 (\log_2 x)^{\beta_2 - 1}} = \frac{1}{\beta_2 (\log_2 r)^{1-\frac{1}{\beta_2}}} = \lambda(r);$$

encore, pour

(a_3) $$a(x) = e^{(\log x)^{\beta_3}} \qquad [1 > \beta_3 > 0]$$

il résulte

(λ_3) $$\mu(x) = \frac{1}{\beta_3 (\log x)^{\beta_3}} = \frac{1}{\beta_3 \log_2 r} = \lambda(r)$$

et, pour

(a_4) $$a(x) = e^{\frac{\log x}{(\log_2 x)^{\beta_4}}} \qquad [\beta_4 > 0],$$

à un facteur $1 + \varepsilon(x)$ ou $1 + \varepsilon(r)$ près,

(λ_4) $$\mu(x) = \frac{(\log_2 x)^{\beta_4}}{\log x} = \frac{1}{\log_2 r} = \lambda(r).$$

Soit ensuite $1 \geq l > 0$. En posant

$$(a_5) \qquad a(x) = x^l,$$

on trouve

$$(\lambda_5) \qquad \mu(x) = \frac{\sqrt{1+l}}{l \log x} = \frac{\sqrt{1+l}}{\log_2 r} = \lambda(r).$$

Les égalités (a_p) $[p = 1, 2, \ldots 5]$ définissent certaines classes de fonctions $a(x)$. La précision, correspondant à une telle classe, est représentée par une classe de fonctions $\lambda(r)$, définie par une égalité (λ_p).

En ce qui concerne le cas $l' > 0$, on voit des égalités (λ_3), (λ_4) et (λ_5) qu'il existe une suite de fonctions $\lambda(r)$ telle que le rapport entre deux fonctions successives puisse être pris moins à $1 + \varepsilon$. Ce qui resterait à montrer encore dans ce cas, c'est que $\dfrac{1}{\log_2 r}$ est la plus petite fonction $\lambda(r)$ que possible.

D'autre part, pour rendre plus complète l'étude de la précision dans le cas $l' = 0$, nous allons présenter les développements suivants.

Posons $\log_2 r = u$ et $\lambda(r) = \dfrac{1}{\varphi(u)}$. Imposons à la fonction $\varphi(u)$ les conditions suivantes :

1° *Elle est définie pour des valeurs réelles est positives de* $u \geq u_0$, *et elle est toujours supérieure à 1.*

2° *Elle a une dérivée* $\varphi'(u) \geq 0$.

3° *La fonction* $\dfrac{\varphi(u)}{u}$ *ne croît jamais, lorsque u croît et* $\lim_{u=\infty} \dfrac{\varphi(u)}{u} = 0$.

Je dis qu'à toute fonction $\varphi(u)$ *correspond une fonction* $a(x)$ *jouissant des propriétés indiquées.*

Nous pouvons écrire

$$(48) \qquad \log a(x) = u$$

$$(49) \qquad \frac{x a'(x) \log x}{a(x)} = \varphi(u)$$

Le 1° sera rempli de soi-même.

En dérivant l'égalité (48) par rapport à u, nous obtenons

$$\frac{\alpha'(x)\,x'}{\alpha(x)} = 1 \tag{50}$$

d'où, à l'aide de (49),

$$\frac{x'}{x \log x} = \frac{1}{\varphi(u)};$$

en intégrant, on trouve

$$\log_2 x - \log c = \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\varphi(u)} = \chi(u) \qquad (c = \log x_0;\ \alpha(x_0) = e^{u_0}). \tag{51}$$

De là

$$x' = \frac{ce^{\chi(u)} + ce^{\chi(u)}}{\varphi(u)}, \tag{52}$$

Il en résulte, en tenant compte des égalités (48) et (50),

$$\alpha'(x) = \frac{1}{c}\, e^{u - \chi(u) - ce^{\chi(u)}} \varphi(u), \tag{53}$$

ce qui met en évidence l'existence de $\alpha'(x)$.

En dérivant ensuite l'égalité (53) par rapport à u et en observant l'égalité (52), on va reconnaître que la dérivée $\alpha''(x)$ existe aussi. Le 2° est donc rempli.

Des égalités (51) et (53) on déduit

$$\psi(x) = \frac{1}{c}\, e^{u - \chi(u)}\, \varphi(u)$$

et, par suite, à l'aide de (52)

$$\frac{x\psi'(x)}{\psi(x)} = \frac{1}{c}\,(\varphi(u) - 1 + \varphi'(u))\, e^{-\chi(u)}. \tag{54}$$

Or, des conditions imposées à $\varphi(u)$ on déduit sans difficulté que le membre droite de la dernière égalité est positif et tend vers zéro en même temps que $\frac{1}{u}$. Les 3° et 4° sont ainsi remplis.

Enfin, des égalités (48) et (49) on trouve

$$\frac{xa'(x)\log x}{a(x)\log a(x)} = \frac{\varphi(u)}{u}$$

ce qui montre que le 5° est rempli. Notre assertion se trouve démontrée.

Remarquons encore que l'égalité (λ_4) définit la plus grande précision que possible. En effet, l'hypothèse $\varphi(u) \geq u(1+\varepsilon)$ entraînera que le membre droite de l'égalité (54) tend vers l'infini avec u.

Deuxième cas. $\lim_{x=\infty} \frac{\psi(x)}{x} = \gamma$; γ *fini.*

Des relations (31), (33), (46) et (46') on peut déduire

$$(55) \qquad \log \overline{m}(r) - \log \overline{M}(r) > -\left[\frac{\pi^2}{2\gamma} + c\,|\log(1-e^{-\Theta\gamma})|\right];$$

de là

$$(c) \qquad \overline{m}(r) = c_1 \overline{M}(r) \qquad [0 < c_1 < 1].$$

Troisième cas. $\psi(x) = x\gamma(x)$, $\gamma(x)$ *désignant une fonction continuellement et indéfiniment croissante.*

De l'inégalité (55), en y remplaçant γ par $\gamma(N+\theta)$, il suit

$$(d) \qquad \overline{m}(r) = \overline{M}(r)\,[1-\varepsilon(r)]$$

On pourrait préciser ici la fonction $\varepsilon(r)$, mais cela n'aura point d'intérêt.

Remarques. Dans le deuxième cas, on a $a(x) = [\gamma + \varepsilon(x)]\,x$ et dans le troisième $a(x) = x\gamma_1(x)$, $\gamma_1(x)$ désignant une fonction continuellement et indéfiniment croissante.

Nous allons rechercher maintenant, comment l'inégalité (a) peut se préciser pour les fonctions dont les modules des zéros ne sont assujettis à aucune condition de régularité. Nous énonçons les théorèmes suivantes.

I. *Si* $r_n \geq e^{a(n)}$, $a(x) < \varepsilon x$, *pour une infinité de valeurs de* n, *l'inégalité*

$$(b) \qquad m(r) > [M(r)]^{\cos[\varrho_m(r)\,\lambda(r)\,(1+\varepsilon)\,\pi]}$$

est vérifiée pour des valeurs de r indéfiniment croissantes, $\lambda(r)$ désignant la fonction définie par l'égalité (47).

II. *Si $r_n \geq e^{\delta n}$, $\delta > 0$, pour une infinité de valeurs de n, l'inégalité* (*c*) *est vérifiée pour des valeurs de r indéfiniment croissantes.*

III. *Enfin, si $r_n > e^{\sigma n}$, σ arbitrairement grand, pour une infinité de valeurs de n, l'inégalité* (*d*) *est vérifiée pour des valeurs de r indéfiniment croissantes.*

Démontrons d'abord le théorème I. En posant $r_n = e^{\alpha(n)\gamma_n}$, *nous pourrons toujours choisir $\alpha(x)$ de façon que $\gamma_n < [\alpha(n)]^{\varepsilon}$ pour tout $n > n_0$.* Car, si $\gamma_n > [\alpha(n)]^{\varepsilon}$ pour une infinité de valeurs de n, nous remplaçons $\alpha(x)$ par une autre fonction $\alpha(x)$, à croissance assez rapide pour que $\gamma_n < [\alpha(n)]^{\varepsilon}$. Il est évident que cela sera toujours possible, s'il fait se montrer que la fonction $[\alpha(x)]^{1+\varepsilon}$ entre dans l'ensemble des fonctions $\alpha(x)$.

Or, on trouve facilement que la fonction $[\alpha(x)]^{1+\varepsilon}$ satisfait aux 1°, 2°, 3° et 5°. Elle satisfait aussi au 4°, comme nous le verrons des développements suivants. En effet, en désignant par $\psi_\varepsilon(x)$ la fonction $\psi(x)$ correspondant à $[\alpha(x)]^{1+\varepsilon}$, nous aurons

$$\frac{x\psi'_\varepsilon(x)}{\psi_\varepsilon(x)} = \frac{x\psi'(x)}{\psi(x)} + \frac{\varepsilon\psi(x)}{\alpha(x)}.$$

D'autre part, on a

$$\alpha(x) - \alpha(x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{\psi(x)}{x} dx$$

d'où, à l'aide du 4° et d'un théorème bien connu dans le Calcul intégral,

$$\frac{\psi(x)}{\alpha(x)} = l + \varepsilon(x).$$

Donc la fonction $[\alpha(x)]^{1+\varepsilon}$ présente toutes les propriétés qui caractérisent $\alpha(x)$, et la limitation ci-dessus des nombres γ_n ne restreindra pas la généralité.

De plus, remarquons que, *dans le cas $l = 0$, la fonction $\lambda(r)$ peut être augmentée par un facteur $1 + \varepsilon(r)$ tout au plus,*

si l'on remplace une certaine fonction $\alpha(x)$ *par une autre,* $\alpha_1(x)$, *à croissance plus rapide.*

En effet, en désignant par $\lambda_1(r)$ la fonction $\lambda(r)$ correspondant à $\alpha_1(x)$, nous pouvons montrer qu'*une inégalité* $\lambda_1(r) \geq \lambda(r)(1+\varepsilon)$ *est impossible pour* r *suffisamment grand.*

Du 4° on déduit d'abord

$$\psi(x) = e^{\int_{x}^{x} \frac{\varepsilon(x)}{x} dx} + \psi(x_0),$$

d'où

$$\alpha'(x) = e^{\int_{x}^{x} \frac{\varepsilon(x)}{x} dx - \log x} + \frac{\psi(x_0)}{x}.$$

De là on trouvera que $\alpha''(x) < 0$, et que, par suite, $\alpha'(x)$ est une fonction décroissante.

Supposons ensuite $\alpha_1(x_1) = \alpha(x) = \log r = e^u$, ce qui entraîne $x_1 < x$, $\alpha_1(x)$ croissant plus rapide que $\alpha(x)$. D'autre part, en remplaçant $\varphi(u)$ par $\frac{\varphi(u)}{1+\varepsilon}$, on voit de l'inégalité (53) que $\alpha'_1(x_1) < \alpha'(x)$ pour x grand. Alors on aura aussi $\alpha_1'(x) < \alpha'(x)$ et $\alpha_1(x) < \alpha(x)$ pour x suffisamment grand, ce qui est évidemment contraire à notre hypothèse sur la fonction $\alpha_1(x)$. L'exactitude de notre remarque est évidente.

Maintenant on comprend aussi *qu'il sera toujours possible de trouver une fonction* $\alpha(x)$ *telle que la précision, abstraction faite d'un facteur* $1+\varepsilon(r)$, *atteigne un maximum, en même temps qu'ait lieu la limitation ci-dessus des nombres* γ_n.

Cela étant, passons à la démonstration du théorème I. Deux cas peuvent se présenter suivant la valeur de $\limsup_{n=\infty}$ sup. γ_n.

Premier cas. $\limsup_{n=\infty} \gamma_n = \gamma$; $\gamma \geq 1$ *et fini.*

On aura alors $\gamma_n = \gamma + \varepsilon(n)$ pour une infinité, d'indices n, N_1, N_2, N_3, . . . N_p, ... et $\gamma_n < \gamma$ pour tous les autres.

Deuxième cas. $\limsup_{n=\infty} \gamma_n = \infty$.

Par un raisonnement tout analogue à celui que nous avons employé pour mettre en évidence l'existence de la fonction $\varrho_m(x)$, on peut trouver une infinité d'indices N_1, N_2, $N_3, \ldots N_p, \ldots$ tels que $\gamma_n \leq \gamma_{N_p}$ pour tout $n \leq N_p$.

Maintenant, dans tous les deux cas, la démonstration du théorème se fait établir par un procédé tout analogue à celui dont nous nous sommes servis dans A.

Soit alors un indice $N = N_p$. Formons la fonction

$$\bar{F}(z) = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{z}{e^{\beta(n)}}\right),$$

étant posé $\beta(x) = \gamma_N (1 - \varepsilon') [\varepsilon' \alpha(N) + \alpha(x)]$.

Soit ensuite N' le plus petit indice, vérifiant l'inégalité

$$\alpha(N' + 1)\, \gamma_N > \beta(N' + 1).$$

Dans le premier cas, nous ajoutons encore un facteur $1 + \varepsilon'^2$ au membre gauche de cette inégalité.

Des propriétés de la fonction $\alpha(x)$ on déduit facilement $N' < N$ et $\alpha(x) > (1 - 2\varepsilon')\ \alpha(N)$ pour $x > N'$.

Ceci posé, prenons $r = e^{\beta(x_1)}$, $n < x_1 < n + 1$, $N' \leq n < N$. Il est évident que la fonction $\beta(x)$ vérifie au moins les propriétés 1—4 de la fonction $\alpha(x)$. Donc, par des développements tout analogues à ceux qui ont conduit à l'égalité (b'), on trouvera

$$\bar{m}(r) = [\overline{M}(r)]^{\cos\left(\frac{\pi\sqrt{1+l}}{x_1 \beta'(x_1)}\,[1 + \varepsilon(x_1)]\right)}$$

égalité qui pourra être écrite

$$\bar{m}(r) > [\overline{M}(r)]^{\cos\,[\varrho_m(r)\ \lambda(r)\ (1+\varepsilon)\pi]}. \tag{56}$$

En effet, on a

$$\varrho_m(r) > \frac{\log N(1 - \varepsilon'')}{\alpha(N)\gamma_N}$$

et, en posant $e^{\alpha(x_2)} = r$,

$$\lambda(r) = \frac{\sqrt{1+l}\ \alpha(x_2)}{x_2\, \alpha'(x_2) \log x_2}.$$

De là

$$\varrho_m(r)\,\lambda(r) > \frac{\sqrt{1+l}\;a(x_2)\;\log N(1-\varepsilon'')}{x_2\;a'(x_2)\log x_2\;a(N)\gamma_N} = \gamma_1(r);$$

d'autre part

$$\frac{\sqrt{1+l}}{x_1\,\beta'(x_1)} = \frac{\sqrt{1+l}}{x_1\,a'(x_1)\,\gamma_N(1-\varepsilon')} = \gamma_2(r).$$

Par suite, nous obtenons

$$\frac{\gamma_1(r)}{\gamma_2(r)} = \frac{(1-\varepsilon''')x_1\,a'(x_1)\,a(x_2)\log N}{x_2\,a'(x_2)\,a(N)\log x_2}, \tag{57}$$

Or, il est évident que l'inégalité (56) est vraie, dès que l'on a

$$\frac{\gamma_1(r)}{\gamma_2(r)} > \frac{1}{1+\varepsilon}, \tag{58}$$

et il s'agit donc de prouver cette inégalité.

Soit d'abord $x_2 \leq x_1$, cas qui peut se présenter où $\gamma = 1$. De l'égalité (57), en rappelant que $\varphi(x)$ est une fonction croissante et que $a(x_2) = \beta(x_1)$, $a(x_1) > (1-2\varepsilon')\,a(N)$, $x_2 \leq x_1 < N$, nous tirons facilement l'inégalité (58).

Soit ensuite $x_2 > x_1$. En vertu du 5° nous avons

$$\frac{x_1\,a'(x_1)\log x_1}{a(x_1)\log a(x_1)} = l' + \varepsilon(x_1)$$

et

$$\frac{x_2\,a'(x_2)\log x_2}{a(x_2)\log a(x_2)} = l' + \varepsilon(x_2)$$

par où l'égalité (57) peut s'écrire

$$\frac{\gamma_1(r)}{\gamma_2(r)} = \frac{(1-\varepsilon''')\,[l'+\varepsilon(x_1)]\,a(x_1)\log a(x_1)\log N}{[l'+\varepsilon(x_2)]\,a(N)\log a(x_2)\log x_1}.$$

De là, en tenant compte de la limitation des nombres γ_n et des relations $a(x_2) = \beta(x_1)$, $a(x_1) > (1-2\varepsilon')\,a(N)$, $x_1 < N$ et

$\varepsilon(x_1) > \varepsilon(x_2)$ pour $l' = 0$, nous reconnaissons que l'inégalité (58) est exacte. L'inégalité (56) est donc vraie.

Pour avoir démontré notre théorème, il reste à montrer que les inégalités (1) et (2) sont vérifiées pour une valeur $r = e^{\beta(x_1)}$.

Conservons les mêmes notations que dans A. Alors, tenant compte des valeurs des nombres N' et N, nous aurons

$$A_\mu > \bar{A}_\mu \qquad [\mu = 1,\ 2].$$

De plus, on voit sans difficulté que $\beta(N) < \alpha(N)\gamma_N$. Par suite, nous pouvons toujours trouver une valeur x_1 telle que

$$B_\mu > \bar{B}_\mu \qquad (\mu = 1,\ 2).$$

Reste donc à faire voir que

$$C_\mu > \bar{C}_\mu \qquad [\mu = 1,\ 2].$$

Nous avons toujours

$$\bar{C}_1 = \prod_{N+1}^{\infty}\left(1 - \frac{r}{e^{\beta(n)}}\right) < e^{-r\sum_{N+1}^{\infty} e^{-\beta(n)}} < e^{-re^{-\beta(N+1)}} =$$

$$= e^{-re^{-\beta(N)[1+\varepsilon(N)]}} = e^{-re^{-\gamma_N \alpha(N)(1-\varepsilon'^2)[1+\varepsilon(N)]}}.$$

D'autre part, d'après des développements faits aux pages 8—9, on aura

$$C_1 > e^{-2re^{-\gamma_N \alpha(N)[1+\varepsilon(N)]}}$$

et, par conséquent,

$$C_1 > \bar{C}_1.$$

D'une manière analogue on trouvera

$$C_2 > \bar{C}_2,$$

et le théorème I se trouve démontré.

La démonstration des théorèmes II et III se fait établir d'une manière analogue. En ce qui concerne le théorème II,

on prend $\alpha(x) = \delta x$ et l'on pourra toujours mettre $\gamma = 1$. D'autre part, pour démontrer le théorème III, nous prenons $\alpha(x) = x$. Alors on aura $\limsup_{n=\infty} \gamma_n = \infty$. Ici, la limitation des nombres γ_n sera inutile. Remarquons encore qu'il suffit de *prouver l'inégalité* (2).

C. Sur quelques relations entre les modules extrêmes des fonctions entières de genre zéro et d'ordre fini à croissance irrégulière.

Dans ce qui précède, nous avons vu le rôle de la croissance irrégulière des zéros des fonctions entières d'ordre zéro. Comment se comportent les fonctions entières d'ordre fini de genre zéro et à croissance irrégulière? Nous allons chercher à répondre à cette question. Toutefois nous nous bornerons à étudier les fonctions présentant le plus d'intérêt, savoir où le module minimum tend vers l'infini. Nous distinguerons plusieurs cas, suivant la valeur de l'ordre.

Premier cas. L'ordre est égal à $\varrho_1 < 1$.

Soit alors $F(z)$ une fonction entière d'ordre $\varrho_1 < 1$, ayant les zéros $-r_i$ [1]

$$F(z) = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{z}{r_i}\right).$$

Supposons $\liminf_{n=\infty} \frac{\log n}{\log r_n} = \varrho_2 < \varrho_1$.

Quelle relation peut-on donc trouver entre $m(r)$ et $M(r)$? Comme on le sait, on a toujours, d'après le théorème cité de M. Wiman, pour des valeurs de r indéfiniment croissantes l'inégalité

$$m(r) > [M(r)]^{\cos(\varrho_1 + \varepsilon)\pi}. \tag{59}$$

[1] Cela ne restreint pas la généralité.

En vertu des recherches précédentes, on pourrait croire que le nombre $\varrho_1 + \varepsilon$, figurant dans (59), peut être remplacé par un nombre plus petit, si ce n'est ϱ_2, au moins un nombre ϱ se trouvant entre ϱ_1 et ϱ_2. Pour décider cette présomption, introduisons la fonction

$$\bar{F}(z) = \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{z}{i^{\frac{1}{\varrho}}}\right) \qquad [\varrho_2 < \varrho < \varrho_1]$$

et cherchons la plus petite valeur de $\varrho < \frac{1}{2}$ qui est compatible avec les inégalités (1) et (2).

Servons-nous de la même méthode et des mêmes notations que dans A.

Soit alors N' un indice tel que $r_{N'} = (N')^{\frac{1}{\varrho_1 + \varepsilon(N')}}$ et N un indice supérieur à N' et tel que $r_N = N^{\frac{1}{\varrho_2 + \varepsilon(N)}}$. Cherchons ensuite à satisfaire aux inégalités (1) et (2) pour un $r = \left(n + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\varrho}}$ $[n = N',\ N'+1,\ \ldots\ N-1]$.

Faisons voir d'abord que $A_\mu > \bar{A}_\mu$ $[\mu = 1,\ 2]$. En observant que l'on peut écrire $x \pm 1 = x\left(1 \pm \frac{1}{x}\right)$ et en tenant compte des inégalités: $\underline{n} > n^n e^{-n}$, $\frac{1+x}{1-x} > e^{2x}$ pour $x < 1$, $1 - x > e^{-2x}$ et $\frac{1-x}{1+x} > e^{-3x}$ pour $x < \frac{1}{2}$, nous trouvons par des calculs faciles

$$\frac{A_1}{\bar{A}_1} > e^{N'\left[\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1 + \varepsilon(N')}\right)\log N' - \frac{1}{\varrho} - 2(N')^{\frac{1}{\varrho_1 + \varepsilon(N')}} - \frac{1}{\varrho}\right]}$$

et

$$\frac{A_2}{\bar{A}_2} > e^{\frac{2 - 3(N')^{\frac{1}{\varrho_1 + \varepsilon(N')}} - \frac{1}{\varrho}}{r}}.$$

Alors l'inégalité $\varrho < \varrho_1$ entraîne

$$A_\mu > \bar{A}_\mu \qquad [\mu = 1,\ 2].$$

Par un procédé tout à fait analogue à celui développé aux pages 11—17, on constate aussi que

$$B_\mu > \overline{B}_\mu \qquad [\mu = 1,\ 2]$$

pour l'un au moins des nombres $r = \left(n + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\varrho}}$ $[n = N,\ N+1,\ \ldots\ N-1]$.

De plus, en faisant des développements analogues à ceux établis aux pages 10—11 et en observant que

$$\sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{\varrho}}} > \int_{N+1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{\varrho}}} = \frac{\varrho (N+1)^{1-\frac{1}{\varrho}}}{1-\varrho},$$

nous trouverons

$$C_1 > e^{-\frac{2r}{1-\varrho_1-\varepsilon(N')}} \cdot N^{-\frac{1-\varrho_1-\varepsilon(N')}{\varrho_2+\varepsilon(N)}},$$

$$C_2 > e^{-\frac{3r}{1-\varrho_1-\varepsilon(N')}} \cdot N^{-\frac{1-\varrho_1-\varepsilon(N')}{\varrho_2+\varepsilon(N)}},$$

$$\overline{C}_1 < e^{-\frac{\varrho(1-\varepsilon)r}{1-\varrho}} \cdot N^{1-\frac{1}{\varrho}},$$

$$\overline{C}_2 < e^{-\frac{2\varrho(1-\varepsilon)r}{1-\varrho}} \cdot N^{1-\frac{1}{\varrho}}.$$

De là il suit que les inégalites $C_\mu > \overline{C}_\mu$ $[\mu = 1,\ 2]$ sont vérifiées, si l'on a

$$1 - \frac{1}{\varrho} > -\frac{1-\varrho_1-\varepsilon(N')}{\varrho_2+\varepsilon(N)}$$

ou, ce qui revient au même, si

$$\varrho > \frac{\varrho_2}{1+\varrho_2-\varrho_1}. \tag{60}$$

Donc, les inégalités (1) et (2) sont remplies pour un nombre $\varrho < \varrho_1$, vérifiant l'inégalité (60). Il est évident qu'il existe toujours un tel nombre.

De là on conclut que ϱ_1 *figurant dans* (59) *peut être remplacé par ce nombre* ϱ.

En particulier, le module minimum tend vers l'infini pour des valeurs de r indéfiniment croissantes, si l'on a $\varrho_1 + \varrho_2 < 1$. Cela s'ensuit de (60) en posant $\varrho < \frac{1}{2}$.

Remarque. Nous avons supposé $\varrho < \frac{1}{2}$, mais en remplaçant les inégalités (1) et (2) par les inégalités (10_1) et (10_2) dans la Note précitée de M. Wiman, on arrivera à la relation (60) encore pour $\varrho > \frac{1}{2}$.

Nous avons supposé jusqu'ici $\varrho_2 > 0$. Soit maintenant $\varrho_2 = 0$.

A l'aide des développements analogues à ceux ci-dessus et à ceux faits aux pages 31—35, on va reconnaître que *les théorèmes I, II et III restent en vigueur encore pour les fonctions entières d'ordre* $\varrho_1 < 1$, *si l'on remplace dans* (*b*) $\varrho_m(r)$ *par* $\frac{\varrho_m(r)}{1-\varrho_1}$.

Deuxième cas. $\varrho_1 = 1$.

Dans ce cas l'inégalité (60) ne nous donnera rien. Pour faire ici une étude, il faut régulariser la suite σ_n pour laquelle $\lim.\ \sup._{n=\infty}\ \sigma_n = 1$.

Cependant nous ne nous y engagerons pas de plus près, mais nous nous contenterons de traiter la question suivante. Peut-on faire tendre vers l'infini le module minimum d'une fonction entière de genre zéro, en choisissant les zéros à croissance convenablement irrégulière? J'ai été conduit à cette question par certains résultats de M. Fritz Carlson [1] qui a trouvé qu'une fonction entière de genre $p > 0$ tend vers zéro uniformément dans certains angles et vers l'infini dans d'autres, si

[1] Sur une classe de séries de Taylor. Thèse, Upsal (1914) p. 31—32.

l'on choisit les arguments de zèros d'une façon convenable. Les modules des zéros n'importent rien. On peut se demander s'il n'existe pas une propriété analogue pour les fonctions entières de genre zéro et d'ordre supérieur à $\frac{1}{2}$. Il n'en est pas ainsi, comme il suit du théorème que voici.

Soit une fonction entière de genre zéro $F(z)$. Il est toujours possible de trouver pour des valeurs de r indéfiniment croissantes l'inégalité

$$m(r) > M(r)\,(1-\varepsilon),$$

en choisissant les zéros à croissance assez irrégulière.

Pour l'ordre inférieur à 1, le théorème est déjà évident. Il reste à le démontrer pour l'ordre égal à 1.

La fonction étant de genre zéro, la serie $\sum_1^\infty \frac{1}{r_n}$ converge toujours. D'après une proposition bien connue de M. Pringsheim, on a alors $\lim_{n=\infty} \frac{n}{r_n} = 0$.

En posant $\frac{r_n}{n} = a_n$, on peut trouver dès lors, par des raisonnements tout analogues à ceux qui ont conduit à la fonction $\varrho_M(x)$, une fonction $a(x)$ avec les propriétés suivantes:

1° *Elle est définie pour des valeurs réelles et positives de $x > x_0$ et elle est elle-même réelle et positive.*

2° *Elle ne décroît jamais, lorsque x croît, et* $\lim_{x=\infty} a(x) = \infty$.

3° $a(n) \leq a_n$ *pour tout* $n > n_0$.

4° $a(n) = a_n$ *pour une infinité de valeurs de n.*

Soit alors un indice N' qui vérifie le 4° et soit N un indice $> N'$ tel que $r_N = \gamma(N)$, $\gamma(x)$ désignant une fonction qui croît aussi vite qu'on le voudra. Introduisons ensuite la fonction

$$F(z) = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{z}{e^{n\varphi(n)}}\right),$$

$\varphi(x)$ désignant une fonction continuellement et indéfiniment croissante.

En se servant des mêmes notations et du même procédé que dans des cas analogues, traités plus haut, on aura pour l'une au moins des valeurs de $r = e^{(n+\Theta)\,\varphi(n+\Theta)}$ $[0 < \theta < 1]$, $[n = N',\ N'+1, \ldots N-1]$

$$A_2 > \bar{A}_2$$

et

$$B_2 > \bar{B}_2$$

De même

$$(61_1) \qquad \bar{C}_2 < e^{-2r \sum_{N+1}^{\infty} e^{-i\varphi(i)}} < e^{-2r\, e^{-(N+1)\,\varphi(N+1)}}$$

et

$$(61_2) \qquad C_2 > e^{-3r \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{r_i}}.$$

Écrivons

$$\sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{r_i} = \sum_{N+1}^{M} \frac{1}{r_i} + \sum_{M+1}^{\infty} \frac{1}{r_i},$$

M désignant le plus grand indice pour lequel $i\,\alpha(i) \leq \gamma(N)$.

Alors on trouve

$$\sum_{N+1}^{M} \frac{1}{r_i} < \frac{M}{\gamma(N)} < \frac{1}{\alpha(M)}.$$

La série $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{r_i}$ étant convergente, nous pouvons encore poser

$$\sum_{M+1}^{\infty} \frac{1}{r_i} = \frac{1}{\beta(M)},$$

$\beta(x)$ désignant une fonction tendant vers l'infini avec x.

Il en résulte

$$\sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{r_i} < \frac{1}{\alpha(M)} + \frac{1}{\beta(M)}. \tag{62}$$

Mais $\alpha(n) < n^{\varepsilon}$, la fonction $F(z)$ étant d'ordre 1. Par suite, en se rappelant la valeur de M,

$$M + 1 > [\gamma(N)]^{1-\varepsilon}.$$

Alors, en choisissant $\gamma(N)$ assez grand, nous pouvons trouver M tel que

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha(M) \\ \beta(M) \end{matrix} \right\} > 3e^{(N+1)\,\varphi(N+1)}.$$

En tenant compte des inégalités $(61_{1,2})$ et (62), nous trouvons dès lors

$$C_2 > \overline{C}_2.$$

Donc, en observant que l'égalité (d) est vérifiée pour $\overline{F}(z)$, on reconnaît l'exactitude du théorème énoncé.

II.

Sur le module minimum des fonctions entières d'ordre $\frac{1}{2}$ et d'ordre 1.

Si l'on exclut dans le plan des z certaines couronnes dont la somme des épaisseurs est convergente, le module minimum de la fonction d'ordre ϱ

$$\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n^{\frac{1}{\varrho}}}\right)^{1} \qquad [0<\varrho<1]$$

tend vers l'infini comme $e^{\delta r^{\varrho}}$ pour $\varrho<\frac{1}{2}$ et vers zéro comme $e^{-\delta r^{\varrho}}$ pour $\varrho>\frac{1}{2}$, δ désignant un nombre positif.

Alors on peut se demander quelle est la croissance du module minimum des fonctions d'ordre $\frac{1}{2}$. M. Carlson[2] a montré que, l'ordre étant par excès, il existe des fonctions où le module minimum tend vers zéro plus vite que $r^{-\sigma}$, σ arbitrairement grand. D'autre part, M. Wiman[3] énonce que, l'ordre étant par défaut, il existe des fonctions où le module minimum tend vers l'infini plus vite que $e^{r^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}$. Nous nous pro-

[1] Wiman: Über die angenäherte Darstellung etc.
[2] La thèse citée p. 29.
[3] La note citée: Über eine Eigenschaft etc. p. 210.

posons ici d'étudier de plus près la croissance du module minimum des fonctions entières d'ordre $\frac{1}{2}$.

Commençons par rechercher le module minimum de la fonction

$$\bar{F}(z) = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{z}{n^2\, a(n)}\right)$$

où $a(x)$ désigne une fonction définie que voici :

1°. *Elle est définie pour des valeurs réelles et positives de* x *et elle est elle-même réelle et positive.*

2°. *Elle a une dérivée* $a'(x)$ *toujours positive et décroissante.*

3°. *La fonction* $\frac{x\, a'(x)}{a(x)}$ *ne croît jamais lorsque* x *croît, et* $\lim_{x=\infty} \frac{x\, a'(x)}{a(x)} = 0$.

Nous trouvons

$$\bar{m}(r) = \prod_1^\infty \left|1 - \frac{r}{n^2\, a(n)}\right|.$$

Posons $r = (N+\theta)^2\, a(N+\theta)$, $0 < \theta < 1$, et introduisons la fonction

$$(1) \qquad \Phi(r) = \prod_1^\infty \left|1 - \frac{r}{n^2\, a(N+\theta)}\right| = \frac{|\sin \pi(N+\theta)|}{\pi(N+\theta)} = \frac{\sin \pi\theta}{\pi(N+\theta)}.$$

Formons ensuite le quotient

$$(2) \qquad Q(r) = \frac{\bar{m}(r)}{\Phi(r)} = \prod_1^\infty \left(\frac{1 - \frac{r}{n^2\, a(n)}}{1 - \frac{r}{n^2\, a(N+\theta)}}\right).$$

Il s'agit maintenant de trouver une expression assez exacte pour $Q(r)$. Nous écrivons

(3) $$Q(r) = \Pi_1 \cdot \Pi_2 \cdot \Pi_3,$$

en posant

$$\Pi_1 = \prod_1^N \frac{a(N+\theta)}{a(n)}, \quad \Pi_2 = \prod_1^N \left(\frac{1 - \dfrac{n^2\, a(n)}{r}}{1 - \dfrac{n^2\, a(N+\theta)}{r}} \right),$$

$$\Pi_3 = \prod_1^\infty \left(\frac{1 - \dfrac{r}{n^2\, a(n)}}{1 - \dfrac{r}{n^2\, a(N+\theta)}} \right).$$

Alors on aura

$$\log\ \Pi_1 = N\ \log\ a(N+\theta) - \sum_1^N \log\ a(n).$$

En vertu des propriétés de $a(x)$ nous pouvons poser

$$\sum_1^N \log\ a(n) = \int_{\delta_1}^{N+\delta_2} \log\ a(x)\, dx, \qquad 0 < \left\{ \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{matrix} \right\} < 1.$$

De là, en intégrant par parties,

(4) $$\log\ \Pi_1 = [1 + \varepsilon(N)] \int_0^{N+\Theta} \frac{x\, a'(x)}{a(x)}\, dx.$$ [1]

Puis, considérons Π_2. Nous pouvons écrire

$$\Pi_2 = \prod_1^N \left(1 + \frac{n^2[a(N+\theta) - a(n)]}{a(N+\theta)\ [(N+\theta)^2 - n^2]} \right),$$

ce qui donne

(5) $$0 < \log\ \Pi_2 < \sum_1^N \frac{n^2[a(N+\theta) - a(n)]}{a(N+\theta)\ [(N+\theta)^2 - n^2]} = s_N.$$

[1] Pour simplifier, nous prenons la limite inférieure dans ces intégrales égale à 0.

A l'aide de la formule des accroissements finis on obtient

$$a(N+\theta) - a(n) = a'(\bar{n})\ (N+\theta-n) \quad [n < \bar{n} < N+\theta],$$

d'où, en tenant compte des propriétés de $a(x)$,

$$s_N < \sum_1^N \frac{n\,a'(n)}{2\,a(n)}$$

et, par suite,

$$s_N < \frac{1}{2}\int_0^N \frac{x\,a'(x)}{a(x)}\,dx.$$

Donc, avec emploi de (5),

$$\log\ \Pi_2 = \theta_1 \cdot \int_0^{N+\theta} \frac{x\,a'(x)}{a(x)}\,dx \qquad \left[0 < \theta_1 < \frac{1}{2}\right]. \tag{6}$$

Enfin, évaluons Π_3. On peut écrire

$$\Pi_3 = \prod_{N+1}^{\infty} \left(1 + \frac{(N+\theta)^2\,[a(n) - a(N+\theta)]}{a(n)\,[n^2 - (N+\theta)^2]}\right)$$

d'où

$$0 < \log\ \Pi_3 < \sum_{N+1}^{\infty} \frac{(N+\theta)^2\,[a(n) - a(N+\theta)]}{a(n)\,[n^2 - (N+\theta)^2]} = S_N. \tag{7}$$

Décomposons la somme S_N de la manière suivante:

$$S_N = \sum_{N+1}^{2N} + \sum_{2N+1}^{\infty} = \Sigma_1 + \Sigma_2\,. \tag{8}$$

Employant la formule des accroissements finis et tenant compte des propriétés de $a(x)$, on trouvera

$$\Sigma_1 < \frac{(N+\theta)^2\,a'(N+\theta)}{a(N+\theta)} \sum_{N+1}^{2N} \frac{1}{n+N+\theta} < (N+\theta)\,\frac{(N+\theta)\,a'(N+\theta)}{2a(N+\theta)}. \tag{9}$$

Pour évaluer S_N, étudions d'abord la fonction

$$\varphi(x) = \frac{a(x) - a(N+\theta)}{a(x)\, x^{\beta}} \tag{10}$$

dans l'intervalle $N+\theta \leq x \leq \infty$, β désignant un nombre positif < 1.

En dérivant $\varphi(x)$ et en nous rappelant les propriétés de $a(x)$, nous obtiendrons un maximum de $\varphi(x)$ pour une valeur x_1 de x satisfaisant à l'équation

$$a(x) - a(N+\theta) = \frac{a(N+\theta)}{\beta} \cdot \frac{x\, a'(x)}{a(x)}.$$

De là on trouve

$$\varphi(x_1) = \frac{x_1\, a'(x_1)}{a(x_1)} \cdot \frac{a(N+\theta)}{\beta x_1^{\beta}\, a(x_1)}$$

et, par suite, avec emploi des propriétés de $a(x)$.

$$\varphi(x_1) < \frac{(N+\theta)\, a'(N+\theta)}{a(N+\theta)} \cdot \frac{1}{\beta(N+\theta)^{\beta}}.$$

Donc

$$\varphi(x) < \frac{(N+\theta)\, a'(N+\theta)}{a(N+\theta)} \cdot \frac{1}{\beta(N+\theta)^{\beta}} \quad \text{pour tout } x \geq N+\theta. \tag{11}$$

Puis, nous pouvons écrire

$$\Sigma_2 = (N+\theta)^2 \sum_{2N+1}^{\infty} \left[\frac{a(n) - a(N+\theta)}{a(n) n^{\beta}} \cdot \frac{n^2}{n^2 - (N+\theta)^2} \cdot \frac{1}{n^{2-\beta}} \right].$$

d'où, à l'aide des relations (10) et (11),

$$\Sigma_2 < \frac{4}{3\beta} (N+\theta)^2 \frac{(N+\theta)\, a'(N+\theta)}{a(N+\theta)\,(N+\theta)^{\beta}} \sum_{2N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-\beta}};$$

mais

$$\sum_{2N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-\beta}} < \int_{2N}^{\infty} \frac{dx}{x^{2-\beta}} = \frac{1}{(1-\beta)\,(2N)^{1-\beta}},$$

par conséquent

$$\Sigma_2 < C_1 (N+\theta) \cdot \frac{(N+\theta)\, a'(N+\theta)}{a(N+\theta)} \qquad [C_1 \text{ fini}]. \tag{12}$$

Or, $\dfrac{x\, a'(x)}{a(x)}$ étant une fonction non croissante, il est évident que

$$(N+\theta)\frac{(N+\theta)\, a'(N+\theta)}{a(N+\theta)} < \int_0^{N+\theta} \frac{x\, a'(x)}{a(x)}\, dx.$$

Donc, en tenant compte de (7), (8), (9) et (12), on arrive au résultat

$$\log\, \Pi_3 = \theta_2 \int_0^{N+\theta} \frac{x\, a'(x)}{a(x)}\, dx \qquad [\theta_2 \text{ fini}]. \tag{13}$$

Les formules (3), (4), (6) et (13) nous donnent dès lors

$$Q(r) = e^{\gamma \cdot \int_0^{N+\theta} \frac{x\, a'(x)}{a(x)}\, dx} \qquad [\gamma \text{ fini}],$$

d'où, à l'aide de (1) et (2),

$$\bar{m}(r) = e^{\gamma \cdot \int_0^{N+\theta} \frac{x\, a'(x)}{a(x)}\, dx} \cdot \frac{\sin \pi\theta}{\pi(N+\theta)}. \tag{14}$$

Considérons ensuite la fonction d'ordre $\dfrac{1}{2}$

$$\bar{F}_1(z) = \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\overline{a(n)}^{n^2}}\right),$$

$a(x)$ désignant la fonction ci-dessus.

Par un procédé analogue à celui que nous venons d'employer, on va obtenir

$$(14^1) \qquad \bar{m}_1(r) = e^{-\gamma' \cdot \int_0^{N+\Theta} \frac{x\,a'(x)}{a(x)}\,dx} \cdot \frac{\sin \pi\theta}{\pi(N+\theta)} \qquad [\gamma' \text{ fini}],$$

étant posé $r = \dfrac{(N+\theta)^2}{a(N+\theta)}$, $0 < \theta < 1$.

Des égalités (14) et (14') on peut déduire

$$(m_1) \qquad \bar{m}(r) > e^{r^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}$$

et

$$(m'_1) \qquad e^{-r^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} > \bar{m}_1(r) > e^{-r^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}$$

pour

$$(a_1) \qquad a'(x) > \frac{1}{x^{1+\varepsilon}};$$

$$(m_2) \qquad \bar{m}(r) = e^{c \cdot r^{\beta}}$$

et

$$(m'_2) \qquad \bar{m}_1(r) = e^{-c' \cdot r^{\beta}} \qquad [c \text{ et } c' \text{ finis}]$$

pour

$$(a_2) \qquad a'(x) = \frac{1}{x^{2-2\beta}} \qquad \left[0 < \beta < \frac{1}{2}\right];$$

$$(m_3) \qquad r^C < \bar{m}(r) < e^{r^{\varepsilon}}$$

et

$$(m'_3) \qquad r^{-C'} > \bar{m}_1(r) > e^{-r^{\varepsilon}} \qquad [C \text{ et } C' \text{ finis}]$$

pour

$$(a_3) \qquad \frac{C_1}{x^2} < a'(x) < \frac{1}{x^{2-\varepsilon}} \qquad [C_1 \text{ fini}];$$

(m_4) $$\bar{m}(r) = r^c \qquad \left[-\frac{1}{2} < c < \overline{C}\right]$$

et $[\overline{C}$ fini]

(m'_4) $$\bar{m}_1(r) = r^{-c'} \qquad \left[\frac{1}{2} < c' < \overline{C}\right]$$

pour

(a_4) $$a'(x) = \frac{c_1}{x^2} \qquad [c_1 \text{ fini}].$$

Maintenant nous allons chercher *quelques classes générales où l'on a la relation*

(e) $$m(r) > e^{r^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}$$

pour des valeurs de r indéfiniment croissantes.

Soit alors $F(z)$ une fonction d'ordre $\frac{1}{2}$ avec les zéros $-a_i$

$$F(z) = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{z}{a_i}\right).$$

Posons $|a_i| = r_i = \lambda_i \cdot i^2$. Nous distinguerons trois catégories générales où l'inégalité (e) soit verifiée, suivant les valeurs limites de la suite λ_n.

La première catégorie contient toutes les fonctions où $\liminf_{n=\infty} \lambda_n = \infty$.

La deuxième catégorie contient les fonctions où $\liminf_{n=\infty} \lambda_n = \lambda'$, λ' *fini,* $\limsup \lambda_n = \lambda''$, λ'' *fini ou infini, et où la condition* $\lambda' < c^2\lambda''$ *est vérifiée, c désignant un nombre, compris entre* 0 *et* 1, *racine de l'équation* $x(2-x) = e^{-2(1-x)}$.

La troisième catégorie contient les fonctions où $\liminf_{n=\infty} \lambda_n = 0$, $\limsup_{n=\infty} \lambda_n = \infty$, *et où il est nécessaire d'introduire une certaine condition.*

Pour caractériser cette condition, introduisons les deux fonctions $\lambda_m(x)$ et $\lambda_M(x)$ que voici.

1° *Elles sont définies pour des valeurs réelles et positives de* $x > x_0$, *et elles sont elles-mêmes réelles et positives.*

2° $\lambda_m(x)$ *est une fonction non croissante et* $\lim_{x=\infty} \lambda_m(x) = 0$; $\lambda_M(x)$ *est une fonction non décroissante et* $\lim_{x=\infty} \lambda_M(x) = \infty$.

3° $\lambda_n \geq \lambda_m(n)$ *et* $\lambda_n \leq \lambda_M(n)$ *pour tout* $n > n_0$.

4° $\lambda_n = \lambda_m(n)$ *et* $\lambda_n = \lambda_M(n)$ *pour des suites infinies de valeurs de* n.

Par un raisonnement tout à fait analogue à celui qui nous a montré l'existence de $\varrho_m(x)$, on peut mettre en évidence l'existence des fonctions ci-dessus[1].

La condition mentionnée sera

$$(\delta) \qquad \limsup_{x=\infty} \lambda_M(x)\ \lambda_m(x^{1+\varepsilon}) \geq \delta > 0.$$

La démonstration de l'inégalité (e) se fait établir par un procédé tout analogue à celui que nous avons employé pour démontrer les théorèmes dans I, en faisant usage de fonctions de comparaison convenables.

De plus, remarquons qu'il suffit de faire voir l'inégalité (e) pour les fonctions dont les zéros sont situés à l'axe réel et négatif.

Traitons d'abord la première catégorie. On pourra trouver une fonction $\lambda(x)$ définie comme $a(x)$, présentée à la page 40, et possédant les mêmes propriétés relatives à λ_n que $a(x)$ à a_n.

Soient alors N' et N deux indices vérifiant l'égalité $\lambda(n) = \lambda_n$. Prenons $N > N'$ et tel que $\lambda_N \geq e^2\, \lambda_{N'}$. Introduisons ensuite comme fonction de comparaison

$$\bar{F}(z) = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{z}{n^2\, a(n)}\right),$$

étant posé $a(x) = e^2 \lambda_{N'} - \dfrac{1}{\log(x+1)}$.

[1] En particulier, $\lambda_M(x)$ soit construite de la manière suivante. En désignant par $N_1, N_2, \ldots N_p, \ldots$ tous les indices tels que $\lambda_n < \lambda_{N_p}$ pour tout $n < N_p$, nous posons $\lambda_M(x) = \lambda_{N_p}$ pour $N_p \leq x < N_{p+1}$.

Il est évident que cette fonction $a(x)$ vérifie l'inégalité (a_1). Par suite, en observant que $\lambda_{N'} < N'^{\varepsilon}$ pour N' grand, l'inégalite (m_1) sera remplie pour $\overline{F}(z)$, en prenant $a(n+\theta)$ $(n+\theta)^2 = r$, $0 < \theta < 1$, $n \geq N'$.

Il s'agit maintenant de montrer que l'inégalité (1) dans I a lieu pour une valeur au moins des n comprises entre N' et $N-1$.

Servons-nous des mêmes notations que dans des cas analogues, traités dans I.

En rappelant que l'on peut écrire $x - 1 = x\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ et que $\underline{|n} > n^n \cdot e^{-n}$, $1 - x > e^{-2x}$ pour $x < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{1-x} > e^x$ pour $x < 1$, nous trouvons alors par des calculs assez faciles

$$\frac{A_1}{\overline{A}_1} > e^{\left(\frac{e^2}{3} - 2\right)\frac{N'^3}{r}}$$

d'où

$$A_1 > \overline{A}_1 .$$

Comme $a(N) < \lambda_N$, on constate encore que

$$B_1 > \overline{B}_1 .$$

Enfin, puisque $\lambda_n \geq \lambda_N$ et $a(n) < \lambda_N$ pour tout $n > N$, on va reconnaître aussi

$$C_1 > \overline{C}_1 .$$

Donc l'inégalité (e) est démontrée pour la première catégorie.

Passons maintenant à la deuxième catégorie.

Soit N' un indice tel que $\lambda_{N'} = \lambda' + \varepsilon(N')$ et N un indice $> N'$ et tel que $\lambda_N = \lambda'' + \varepsilon(N)$. Introduisons encore un nombre $\gamma = \frac{\lambda'}{\sigma_1^2} =$ $= \sigma_2^2 \cdot \lambda''$, σ_1 et σ_2 désignant deux nombres inférieurs à l'unité qui seront déterminés plus loin. Prenons ensuite comme fonction de comparaison

$$\bar{F}(z) = \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a(n)n^2}\right),$$

étant posé $a(x) = \gamma - \dfrac{1}{\log(x+C)}$, C tel que $a(x) > 0$.

Il est évident que l'inégalité (m_1) sera remplie pour cette fonction $\bar{F}(z)$. Il s'agit donc comme dans le cas précédent de démontrer l'inégalité (1) dans I pour une valeur au moins de $r = a(n+\theta)\,(n+\theta)^2$, $0 < \theta < 1$, $n = N'$, $N'+1$, . . $N-1$.

En nous servant des notations habituelles, nous avons immédiatement

$$B_1 > \bar{B}_1 .$$

De plus, on pourra écrire

$$\frac{A_1}{\bar{A}_1} \geq \frac{(\gamma-\varepsilon)^{N'}\,(\lfloor N' \rfloor)^2}{\prod_{1}^{N'} \lambda_n n^2} \cdot e^{\sum_{1}^{N'} \log\left(1 - \frac{\lambda_n n^2}{r}\right) - \sum_{1}^{N'} \log\left(1 - \frac{(\gamma-\varepsilon)n^2}{r}\right)} .$$

Pour n grand on a $\lambda_n < \lambda'' + \varepsilon$. Soit alors $\bar{N}$ le plus grand indice tel que $(\lambda'' + \varepsilon)\,\bar{N}^2 \leq \lambda_{N'} N'^2$, et posons $\lambda_{N'} = \sigma^2\,(\lambda'' + \varepsilon)$.

Nous trouvons donc

$$\frac{A_1}{\bar{A}_1} \geq \left(\frac{1-\varepsilon'}{\sigma_1\, e^{1-\sigma}}\right)^{2N'} \cdot e^{-\sum_{1}^{N'} \log\left(1 - \frac{(\gamma-\varepsilon)n^2}{r}\right) + \sum_{1}^{\bar{N}} \log\left(1 - \frac{(\lambda''+\varepsilon)n^2}{r}\right) +}$$

$$+ (N' - \bar{N}) \log\left(1 - \frac{\lambda_{N'} N'^2}{r}\right).$$

Les sommes figurant dans cette expression peuvent être évaluées par des intégrales. En effet, on a

$$-\sum_{1}^{N'} \log\left(1 - \frac{(\gamma-\varepsilon)n^2}{r}\right) > -\int_{0}^{N'} \log\left(1 - \frac{(\gamma-\varepsilon)x^2}{r}\right) dx = I_1$$

et

$$\sum_{1}^{N} \log\left(1 - \frac{(\lambda''+\varepsilon)n^2}{r}\right) > \int_{0}^{\bar{N}+1} \log\left(1 - \frac{(\lambda''+\varepsilon)x^2}{r}\right) dx = I_2 .$$

Introduisons dans I_1 la variable $u = x\sqrt{\frac{\gamma - \varepsilon}{r}}$ et, dans I_2, $u = x\sqrt{\frac{\lambda'' + \varepsilon}{r}}$ et posons $\sqrt{\frac{(\gamma - \varepsilon)N'^2}{r}} = \delta$ $[0 < \delta < 1]$.

Alors nous obtenons

$$I_1 = -\frac{N'}{\delta}\int_0^{\delta} \log\ (1 - u^2)\ du$$

et

$$I_2 = \frac{N'}{\delta}\,\frac{\sigma}{\sigma_1}\int_0^{\sigma'_1\delta} \log\ (1 - u^2)\ du \qquad [\sigma'_1 = \sigma_1\ (1 + \varepsilon[\bar{N}])]$$

d'où, en posant $-\int_0^x \log\ (1 - u^2)\ du = \varphi(x)$ $[0 < x < 1]$, on trouvera

$$\frac{A_1}{\bar{A}_1} \geq \left(\frac{1 - \varepsilon'}{\sigma_1 e^{1-\sigma}}\right)^{2N'} \cdot e^{N'\left[\frac{\varphi(\delta)}{\delta} - \frac{\sigma}{\sigma'_1\delta}\varphi(\sigma'_1\delta) + (1-\sigma)\ \log\ (1 - [\sigma'_1\delta]^2)\right]}.$$

En posant l'expression entre les crochets $= f(\delta)$, nous aurons, en développant en série $\varphi(x)$ et $\log\ (1 - x^2)$,

$$f(\delta) = \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n(2n+1)}\,\delta^{2n}$$

où $a_n = 1 - \sigma'^{2n}_1\ (2n + 1 - 2n\sigma)$.

Nous pouvons écrire dès lors

$$\frac{A_1}{\bar{A}_1} \geq \left[\left(\frac{1 - \varepsilon'}{\sigma_1 e^{1-\sigma}}\right)^2 \cdot e^{f(\delta)}\right]^{N'}. \tag{15}$$

Donc nous aurons

$$A_1 > \bar{A}_1,$$

si le membre droit de (15) est supérieur à 1, ce qui arrivera, si l'on a

$$\sigma_1\, e^{1-\sigma} \leq 1 - \varepsilon'. \tag{16}$$

En effet, la condition (16) étant vérifiée, il se fait montrer que tous les coefficients a_n sont positifs.

En tenant compte de l'inégalité $e^{2(1-\sigma)} > 1 + 2(1-\sigma)$ et en observant la valeur de σ'_1 on tire de (16)

$$\sigma_1'^2 < \frac{1}{3-2\sigma}$$

ce qui entraîne

$$a_n > 1 - \frac{2n+1-2n\sigma}{(3-2\sigma)^n}.$$

Or, on peut écrire toujours

$$2n+1-2n\sigma = [2n-1-2(n-1)\sigma]\,[3-2\sigma] - 4(n-1)(1-\sigma)^2$$

d'où l'on déduit de proche en proche

$$2n+1-2n\sigma < [2n-1-2(n-1)\sigma]\,[3-2\sigma] < (3-2\sigma)^n.$$

Par suite on a $a_n > 0$ pour tout n et $f(\delta) > 0$ pour tout δ.

Donc, la condition (16) donnant lieu encore à l'inégalité

$$\frac{1-\varepsilon'}{\sigma_1 e^{1-\sigma}} \geq 1,$$

le membre droit de (15) est supérieur à 1.

Puis, écrivons

$$\frac{C_1}{\overline{C_1}} = e^{\sum_{N+1}^{\infty} \log\left(1-\frac{r}{\lambda_n n^2}\right) - \sum_{N+1}^{\infty} \log\left(1-\frac{r}{\alpha(n)n^2}\right)}$$

et posons

$$\sum_{N+1}^{\infty} \log\left(1-\frac{r}{\lambda_n n^2}\right) = \sum_{N+1}^{m} + \sum_{m+1}^{\infty},$$

m désignant le plus grand indice qui vérifie l'inégalité $(\lambda' - \varepsilon)m^2 < \lambda_N N^2$.

Alors, en observant de même que $\alpha(n) < \gamma$ pour tout n, nous obtenons

$$\frac{C_1}{\overline{C}_1} > e^{-\sum_{N+1}^{\infty} \log\left(1-\frac{r}{\gamma n^2}\right) + \sum_{m+1}^{\infty} \log\left(1-\frac{r}{(\lambda'-\varepsilon)n^2}\right) + (m-N)\log\left(1-\frac{r}{\lambda_N N^2}\right)}.$$

Évaluons les sommes figurant dans cette expression par des intégrales; nous trouverons

$$-\sum_{N+1}^{\infty} \log\left(1-\frac{r}{\gamma n^2}\right) > -\int_{N+1}^{\infty} \log\left(1-\frac{r}{\gamma x^2}\right) dx = I_1$$

et

$$\sum_{m+1}^{\infty} \log\left(1-\frac{r}{(\lambda'-\varepsilon)n^2}\right) > \int_{m}^{\infty} \log\left(1-\frac{r}{(\lambda'-\varepsilon)x^2}\right) dx = I_2.$$

En introduisant dans I_1 la variable $u = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{r}{\gamma}}$ et dans I_2 $u = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{r}{\lambda'-\varepsilon}}$ et en posant $\sqrt{\frac{r}{\gamma(N+1)^2}} = \delta$, $\sqrt{\frac{\lambda'-\varepsilon}{\lambda_N}} = \sigma'$, on obtiendra

$$I_1 = -(N+1)\delta \int_0^{\delta} \log(1-u^2)\frac{du}{u^2}$$

et

$$I_2 = (N+1)\frac{\sigma'_2\delta}{\sigma'} \int_0^{\sigma'_2\delta} \log(1-u^2)\frac{du}{u^2} \qquad [\sigma'_2 = \sigma_2\,[1+\varepsilon(N)].$$

Par suite, en posant $-\int_0^x \log(1-u^2)\frac{du}{u^2} = \Phi(x)$ $[0 < x < 1]$, nous trouverons

$$(17) \qquad \frac{C_1}{\overline{C}_1} > e^{(N+1)\left[\delta\,\Phi(\delta) - \frac{\sigma'_2\delta}{\sigma'}\Phi(\sigma'_2\delta) + \left(\frac{1}{\sigma'}-1\right)\log(1-\sigma'^2_2\delta^2)\right]} = e^{(N+1)\,F(\delta)}.$$

En développant en série les fonctions $\Phi(x)$ et $\log(1-x^2)$, on trouve

$$F(\delta) = \sum_{1}^{\infty} \frac{b_n}{n(2n-1)} \delta^{2n}$$

étant posé $b_n = 1 - {\sigma'_2}^{2n}\left[\frac{2n}{\sigma'} - (2n-1)\right]$.

De (17) on voit que

$$C_1 > \bar{C}_1,$$

dès que

$$F(\delta) \geq 0,$$

Cela arrive si l'on a

$$(18) \qquad {\sigma'_2}^2 \leq \frac{\sigma'}{2-\sigma'}.$$

En effet, la condition (18) étant vérifiée, on aura pour tout n

$$b_n \geq 1 - \left(\frac{\sigma'}{2-\sigma'}\right)^n \cdot \frac{2n-(2n-1)\sigma'}{\sigma'}.$$

Or, nous pouvons écrire toujours

$$\frac{2n-(2n-1)\sigma'}{\sigma'} = \frac{2(n-1)-2(n-1)\sigma'}{\sigma'} \cdot \frac{2-\sigma'}{\sigma'} - \frac{4(n-1)(1-\sigma')^2}{\sigma'^2}$$

d'où l'on trouve de proche en proche

$$\frac{2n-(2n-1)\sigma'}{\sigma'} < \frac{2(n-1)-[2(n-1)-1]\sigma'}{\sigma'} \cdot \frac{2-\sigma'}{\sigma'} < \left(\frac{2-\sigma'}{\sigma'}\right)^n.$$

Donc, $b_n \geq 0$ pour tout n et, par suite, $F(\delta) > 0$ pour tout δ.

Pour avoir démontré l'inégalité (*e*) pour la deuxième catégorie, il reste à faire voir que les conditions (16) et (18) sont compatibles avec la définition de cette catégorie.

En posant $\bar{\sigma}^2 = \frac{\lambda'}{\lambda''}$ et en se rappelant les valeurs de σ,

σ', σ'_1, σ'_2, on va reconnaître que ces conditions soient remplies, dès que l'on a

$$\sigma_1^2 \leq e^{-2(1-\bar{\sigma})}(1-\varepsilon)$$

et

$$\sigma_2^2 \leq \frac{\bar{\sigma}}{2-\bar{\sigma}}(1-\varepsilon)$$

En tenant compte des valeurs de σ_1 et σ_2, ces inégalités donnent lieu à

$$\bar{\sigma}(2-\bar{\sigma}) \leq e^{-2(1-\bar{\sigma})}(1-\varepsilon'')$$

ou, ce qui revient au même, à

$$\frac{e^{-2(1-\bar{\sigma})}}{\bar{\sigma}(2-\bar{\sigma})} \geq 1+\varepsilon''' . \tag{19}$$

Soit x_0 la racine différente de 1 de l'équation $x(2-x) = e^{-2(1-x)}$. D'après la définition de la deuxième catégorie, on aura alors $\bar{\sigma} < x_0$. D'autre part, on montre sans difficulté que la dérivée de la fonction $\frac{e^{-2(1-x)}}{x(2-x)}$ est négative pour $0 < x \leq x_0$. Par suite, cette fonction admettant la valeur 1 pour $x = x_0$, l'inégalité (19) sera remplie. Donc la démonstration est établie pour la deuxième catégorie.

Remarque. Si $\lambda'' = \infty$, on peut trouver une suite de n, N_1, N_2, ... N_p, ... telle que $\lambda_n \leq \lambda_{N_p}$ pour tout $n \leq N_p$, et la démonstration ci-dessus subsistera encore.

Enfin, traitons la troisième catégorie.

Soit N' un indice tel que $\lambda_{N'} = \lambda_m(N')$. Soit de même N un indice $> N'$ tel que $\lambda_N = \lambda_M(N)$ et que la condition (δ) soit vérifée pour $x = N$. En vertu de la construction de $\lambda_M(x)$, il sera toujours possible de trouver un tel indice.

Choisissons ensuite comme fonction de comparaison la fonction

$$\bar{F}(z) = \prod_1^{\infty}\left(1+\frac{z}{a(n)n^2}\right)$$

étant posé $\alpha(x) = \gamma_1 - \frac{1}{\log(x+C)}$, γ_1 désignant un nombre positif qui sera déterminé plus loin, et C tel que $\alpha(x) > 0$. Il est évident que l'inégalite (m_1) est remplie aussi pour cette fonction $\overline{F}(z)$.

Prenons r de la manière habituelle et servons-nous des mêmes notations que plus haut.

En observant que $\lambda_{N'}$ est petit et que, par suite, $\lambda_{N'} < \frac{\gamma_1 - c}{e^2}$, $0 < c < \gamma_1$, nous obtiendrons comme dans la démonstration établie pour la première catégorie

$$A_1 > \bar{A}_1.$$

De plus, l'inégalité $\alpha(N) < \lambda_N$ ayant lieu, on trouvera comme d'ordinaire

$$B_1 > \bar{B}_1.$$

Puis, en nous rappelant les inégalités: $\frac{1}{1-x} > e^x$ pour $0 < x < 1$, $1 - x > e^{-2x}$ pour $0 < x < \frac{1}{2}$ et $\alpha(n) < \gamma_1$ pour tout n, nous aurons

$$\frac{C_1}{\bar{C}_1} > e^{-2r \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n n^2} + \frac{r}{\gamma_1} \sum \frac{1}{n^2}}. \tag{20}$$

On trouve immédiatement

$$\sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} > \int_{N+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{N+1}. \tag{21}$$

Pour évaluer la somme $\sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n n^2}$, écrivons

$$\sum_{N+1}^{\infty} = \sum_{N+1}^{m} + \sum_{m+1}^{M} + \sum_{M+1}^{\infty},$$

en posant

$$m = E[N\lambda_N + 1]$$

et

$$M = E[N^{1+\varepsilon} + 1].$$

Alors on trouvera

$$\sum_{N+1}^{m} \frac{1}{\lambda_n n^2} \leq \frac{m-N}{N^2\lambda_N} < \frac{m-1}{N^2\lambda_N} < \frac{1}{N},$$

et, en se rappelant la valeur de N,

$$\sum_{m+1}^{M} \frac{1}{\lambda_n n^2} \leq \frac{\lambda_M(N)}{\delta} \sum_{m+1}^{M} \frac{1}{n^2} < \frac{\lambda_N}{\delta}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{M}\right) < \frac{1}{\delta N}.$$

De même, en observant que $\lambda_n > n^{-\frac{\varepsilon}{2}}$ pour n grand,

$$\sum_{M+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n n^2} < \sum_{M+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-\frac{\varepsilon}{2}}} < \int_{M}^{\infty} \frac{dx}{x^{2-\frac{\varepsilon}{2}}} < \frac{1}{\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)(N^{1+\varepsilon})^{1-\frac{\varepsilon}{2}}} < \frac{1}{N}.$$

De là

$$\sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n n^2} < \frac{1}{N}\left(2 + \frac{1}{\delta}\right). \tag{22}$$

Les relations (20), (21) et (22) nous donnent

$$\frac{C_1}{\overline{C}_1} > e^{\frac{r}{N}\left[\frac{1+\varepsilon(N)}{\gamma_1} - \left(4+\frac{2}{\delta}\right)\right]}$$

d'où, en choisissant $\gamma_1 < \dfrac{\delta}{2+4\delta}$, on a

$$C_1 > \overline{C}_1.$$

Ainsi l'inégalité (*e*) est démontrée aussi pour la troisième catégorie.

Remarque. Pour $\lambda_M(N) > N^{\varepsilon}$, on aura $m > M$. Alors la somme $\sum_{m+1}^{M}$ disparaît, et nous pouvons poser $m = M$.

Passons maintenant à l'étude du module minimum des fonctions entières d'ordre 1. Le point de départ sera encore un théorème de M. Wiman[1]. Ce théorème est conçu en les termes suivants.

Étant donnée une fonction entière, $F(z)$, d'ordre $\varrho \leq 1$ et de genre zéro, on a pour des valeurs de r indéfiniment croissantes l'inégalité

$$(f) \qquad M(r)\, m(r) > e^{r^{\varrho - \varepsilon}}.$$

Tout en donnant la preuve de ce théorème, nous allons montrer, comment celui-ci se laisse étendre encore à certaines classes de fonctions de genre un.

Soit donc $F(z)$ une fonction entière de genre un avec les zéros $-a_n$.

$$F(z) = e^{az} \prod_1^\infty \left(1 + \frac{z}{a_n}\right) e^{-\frac{z}{a_n}}.$$

En posant $|a_n| = r_n$ et en formant le produit $F(-z)\, F(z)$, nous trouvons

$$|F(-z)\, F(z)| = \prod_1^\infty \left|1 - \frac{z^2}{{a_n}^2}\right| \geq \prod_1^\infty \left|1 - \frac{r^2}{{r_n}^2}\right|.$$

Or, on peut choisir z de telle sorte que

$$|F(-z)| = m(r)$$

d'où, en observant que $|F(z)| \leq M(r)$.

$$(23) \qquad M(r)\, m(r) \geq \prod_1^\infty \left|1 - \frac{r^2}{{r_n}^2}\right|,$$

résultat qui subsiste aussi, quand $F(z)$ est une fonction de genre zéro.

[1] La note citée: Über eine Eigenschaft etc. p. 211.

Si $F(z)$ est d'ordre ϱ, il est évident que le membre droit de (23) est le module minimum d'une fonction entière de z^2 d'ordre $\frac{\varrho}{2}$. Alors, en se rappelant un théorème bien connu de M. Wiman[1] et les résultats trouvés dans le précédent, on voit que *l'inégalité (f) est vérifiée pour les fonctions entières de genre zéro et pour des fonctions de genre un et d'ordre* 1 *où les nombres* r_n^2 *satisfont aux conditions qui caractérisent* r_n *dans les catégories de fonctions d'ordre* $\frac{1}{2}$ *indiquées plus haut.*

[1] Wiman, Sur une extension d'un théorème de M. Hadamard, Arkiv för Mat. Astr. och Fysik 2 (1905), Nr 14.

III.

Sur quelques relations entre le module maximum $M(r)$ des fonctions entières d'ordre inférieur à un et le nombre des zéros dont le module est inférieur ou égal à r.[1]

Regardons la fonction d'ordre ϱ

$$\overline{F}(z) = \prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{\frac{1}{n^{\varrho}}}\right) \qquad [0<\varrho<1].$$

Comme on le sait de résultats de M. Wiman[2], on a

$$M(r) = e^{\frac{\pi r^{\varrho}}{\sin \pi\varrho}[1+\varepsilon(r)]}. \tag{1}$$

En supposant que N est le nombre des zéros dont le module est inférieur ou égal à r, nous pouvons poser $r = (N+\theta)^{\frac{1}{\varrho}}$ $[0 \leq \theta < 1]$, et l'égalité (1) nous donnera

$$N = \frac{\sin \pi\varrho}{\pi} \log \overline{M}(r)\,[1+\varepsilon(r)]. \tag{2}$$

Puis, recherchons une autre fonction d'ordre ϱ, à savoir

---

[1] M. Valiron aussi a fait des recherches sur ce sujet. [Thèse citée.] Cependant ses résultats sont donnés sous une autre forme que les nôtres, et ils sont d'ailleurs dans certains cas moins précis et moins généraux.

[2] La note citée: Über die angenäherte Darstellung etc.

$$\bar{F}_1(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{z}{n^{\frac{1}{\varrho}}}\right)^q\right],$$

q désignant un nombre entier, arbitrairement grand mais fixe.

La fonctions $\bar{F}(z)$ peut être regardée aussi comme une fonction entière de z^q avec les zéros $-n^{\frac{q}{\varrho}}$. Par suite, nous trouverons

$$\bar{M}_1(r) = e^{\frac{\pi r^{\varrho}}{\sin \frac{\pi\varrho}{q}}\,[1+\varepsilon(r)]} \tag{3}$$

Soit N' le nombre des zéros ayant le module inférieur ou égal à r. En posant $r = (N+\theta)^{\frac{1}{\varrho}}$ $[0 \leq \theta < 1]$, on en a $N' = qN$. Alors on tire de (3)

$$N' = \frac{q \sin \frac{\pi\varrho}{q}}{\pi} \log \bar{M}_1(r)\,[1+\varepsilon(r)].$$

Or, on peut prendre la différence $\pi\varrho - q \sin \frac{\pi\varrho}{q}$ aussi petit que l'on voudra, en choisissant q assez grand. Par conséquent

$$N' = (\varrho - \varepsilon) \log \bar{M}_1(r). \tag{4}$$

Les relations (2) et (4) nous conduisent à énoncer le théorème suivant.

Etant donnée une fonction entière, $F(z)$, d'ordre $\varrho < 1$, on a pour des valeurs de r indéfiniment croissantes

$$N < (\varrho + \varepsilon) \log M(r) \tag{g_1}$$

et

$$N > \frac{\sin \pi\varrho}{\pi} \log M(r)\,(1-\varepsilon), \tag{g_2}$$

N désignant le nombre des zéros dont le module est inférieur ou égal à r.

Que ces relations ne puissent pas être vérifiées pour tout r, c'est évident par une étude de la fonction d'ordre ϱ

$$\prod_{1}^{\infty}\left(1+\left[-\frac{z}{(nq_n)^{\frac{1}{\varrho}}}\right]^{q_n}\right),$$

les nombres q_n désignant une suite de nombres entiers croissant avec n aussi vite que l'on voudra. Prenons, par exemple,

$q_n = 2^{2^n}$ et $r = (n\cdot 2^{2^n})^{\frac{1}{\varrho}} \pm \varepsilon$.

Démontrons d'abord l'inégalité (g_1). Soit r_n le module du $n^{\text{ième}}$ zéro de la fonction $F(z)$. Posons

$$\frac{r_n}{n^{\frac{1}{\varrho+\varepsilon}}} = l_n. \tag{5}$$

La fonction étant d'ordre ϱ, on a toujours $\lim_{n=\infty} l_n = \infty$. Alors, par un raisonnement tout analogue à celui qui a conduit à la fonction $\varrho_m(x)$, on peut trouver une infinité d'indices $N_1, N_2, \ldots N_p \ldots$. *tels que* $l_n \leq l_{N_p}$ *pour tout* $n \leq N_p$.

Prenons ensuite

$$r = l_{N_p}\,(N_p-\theta)^{\frac{1}{\varrho+\varepsilon}} \qquad [0<\theta\leq 1]. \tag{6}$$

En vertu de (5) et de la valeur de N_p, on a donc pour tout $n < N_p$

$$r_n \leq l_{N_p}\, n^{\frac{1}{\varrho+\varepsilon}} < r. \tag{7}$$

D'autre part, $r_n \geq l_{N_p}\, N_p^{\frac{1}{\varrho+\varepsilon}} > r$ pour tout $n \geq N_p$. Par suite, le nombre des zéros ayant le module $\leq r$ est égal à $N_p - 1$.

En faisant usage du théorème de M. Jensen, on trouve, avec emploi de (6) et (7)

$$M(r) > \frac{\left[l_{N_p}(N_p-\theta)^{\frac{1}{\varrho+\varepsilon}}\right]^{N_p-1}}{l_{N_p}{}^{N_p-1}(\underline{N_p-1})^{\frac{1}{\varrho+\varepsilon}}} > \frac{(N_p-1)^{\frac{N_p-1}{\varrho+\varepsilon}}}{(\underline{N_p-1})^{\frac{1}{\varrho+\varepsilon}}}$$

d'où, en se rappelant que $\underline{n} = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\,[1+\varepsilon(n)]$, on tire

$$N_p - 1 < (\varrho+\varepsilon')\ \log\ M(r).$$

Ainsi l'inégalité (g_1) est démontrée.

Passons maintenant à la démonstration de l'inégalité (g_2). Maintenons l'égalité (5) et posons encore

$$\frac{r_m}{n^{\frac{1}{\varrho-\varepsilon}}} = \delta_n. \tag{8}$$

La fonction $F(z)$ étant d'ordre ϱ, on a $\lim\inf_{n=\infty}\ \delta_n = 0$.

Par un raisonnement analogue à celui qui a conduit à la fonction $\varrho_M(x)$, nous pouvons trouver une infinité d'indices $M_1, M_2, \ldots M_p, \ldots$ *tels que* $l_n \geq l_{M_p}$ *pour tout* $n \geq M_p$. De plus, un raisonnement tout à fait analogue à celui qui a montré l'existence de la fonction $\varrho_m(x)$ nous donnera une suite illimitée d'indices $N_1, N_2, \ldots N_p, \ldots$ *tels que* $\delta_n \geq \delta_{N_p}$ *pour tout* $n \leq N_p$. Pour abréger, désignons la première suite par (M) et la deuxième par (N).

Maintenant on peut montrer *qu'il existe une suite illimitée,* (ν), *d'indices* $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_p \ldots$ *qui sont compris soit dans* (M) *soit dans* (N).

En effet, soit M un nombre de la suite (M) et N *le plus grand* nombre de la suite (N) qui est inférieur ou égal à M. Si $N = M$, notre assertation est immédiatement évidente. D'autre part, si $N < M$, on trouve, d'après (5) et (8) et en vertu de la valeur de N, pour $N \leq n \leq M$

$$r_n = l_n n^{\frac{1}{\varrho+\varepsilon}} \geq \delta_N \cdot n^{\frac{1}{\varrho-\varepsilon}}$$

d'où

$$l_n \geq \delta_N \cdot n^{\frac{2\varepsilon}{\varrho^2-\varepsilon^2}} = \delta_N \cdot n^{\varepsilon_1} \qquad [N \leq n \leq M].$$

Par suite, le signe d'égalité ayant lieu pour $n = N$, nous obtenons

$$l_N = \delta_N \cdot N^{\varepsilon_1} < \delta_N \cdot n^{\varepsilon_1} \leq l_n \qquad [M \geq n > N]. \tag{9}$$

Or, M étant compris dans (M), on a $l_M \leq l_n$ pour tout $n \geq M$. Donc, d'après (9), $l_N \leq l_n$ pour $n \geq N$, ce qui montre que N est compris dans (M). Notre assertation se trouve démontrée.

Cela étant, soit ν un nombre compris dans la suite (ν). Nous pouvons poser

$$r_\nu = l_\nu \cdot \nu^{\frac{1}{\varrho + \varepsilon}} = \delta_\nu \cdot \nu^{\frac{1}{\varrho - \varepsilon}}.$$

Puis, choisissons

$$r = l_\nu (\nu + \theta)^{\frac{1}{\varrho + \varepsilon}} = \delta_\nu (\nu + \theta_1)^{\frac{1}{\varrho - \varepsilon}} \qquad 0 \leq \left\{ \begin{matrix} \theta \\ \theta_1 \end{matrix} \right\} < 1. \tag{10}$$

Il est évident que ν est le nombre des zéros dont le module est inférieur ou égal à r. En effet, on a $r_\nu \leq r < l_\nu (\nu + 1)^{\frac{1}{\varrho + \varepsilon}} < r_{\nu+1}$.

D'autre part, nous pouvons écrire toujours

$$M(r) \leq \prod_1^{\nu} \left(1 + \frac{r}{r_n}\right) \prod_{\nu+1}^{\infty} \left(1 + \frac{r}{r_n}\right) = \Pi_1 \cdot \Pi_2 . \tag{11}$$

En se rappelant la valeur de ν, on a $r_n \geq \delta_\nu n^{\frac{1}{\varrho - \varepsilon}}$ pour $n \leq \nu$ et $r_n \geq l_\nu n^{\frac{1}{\varrho + \varepsilon}}$ pour $n \geq \nu$. Par conséquent

$$\Pi_1 < \prod_1^{\nu} \left(1 + \frac{r}{\delta_\nu n^{\frac{1}{\varrho - \varepsilon}}}\right) = \frac{r^\nu}{\delta_\nu^\nu (\nu!)^{\frac{1}{\varrho - \varepsilon}}} \cdot \prod_1^{\nu} \left(1 + \frac{\delta_\nu n^{\frac{1}{\varrho - \varepsilon}}}{r}\right) \tag{12}$$

et

$$\Pi_2 < \prod_{\nu+1}^{\infty} \left(1 + \frac{r}{l_\nu n^{\frac{1}{\varrho + \varepsilon}}}\right). \tag{13}$$

Or, il est évident que $\delta_\nu n^{\varrho-\varepsilon} < l_\nu n^{\varrho+\varepsilon}$ pour $n < \nu$; par suite

$$\prod_1^\nu \left(1 + \frac{\delta_\nu n^{\varrho-\varepsilon}}{r}\right) < \prod_1^\nu \left(1 + \frac{l_\nu n^{\varrho+\varepsilon}}{r}\right)$$

d'où, à l'aide de (11), (12) et (13),

$$M(r) < \frac{r^\nu}{\delta_\nu^\nu (\lfloor \nu \rfloor)^{\varrho-\varepsilon}} \prod_1^\nu \left(1 + \frac{l_\nu n^{\varrho+\varepsilon}}{r}\right) \prod_{\nu+1}^\infty \left(1 + \frac{r}{l_\nu n^{\varrho+\varepsilon}}\right).$$

Avec emploi de (10), le premier facteur du membre droit de cette inégalité devient

$$e^{\nu\left(\varrho-\varepsilon\right)\left[1+\varepsilon(\nu)\right]};$$

d'autre part, d'après un résultat de M. Wiman[1], on va obtenir pour les deux produits l'expression

$$e^{(\nu+\Theta)\left[\frac{\pi}{\sin \pi(\varrho+\varepsilon)} - \frac{1}{\varrho+\varepsilon}\right]}.$$

Par suite, nous aurons

$$M(r) < e^{(\nu+\Theta)\left[\frac{1+\varepsilon(\nu)}{\varrho-\varepsilon} - \frac{1}{\varrho+\varepsilon} + \frac{\pi}{\sin \pi(\varrho+\varepsilon)}\right]}$$

d'où, par un calcul facile,

$$\nu > \frac{\sin \pi\varrho}{\pi} \log M(r)\,(1-\varepsilon').$$

Donc l'inégalité (g_2) est démontrée.

Remarque. Dans l'inégalité (g_1) *nous pouvons remplacer* ϱ *par* ϱ', ϱ' *désignant* $\liminf_{u=\infty} \frac{\log n}{\log r_n}$. En effet, en remplaçant ϱ par

[1] La note citée: Über die angenäherte Darstellung etc. [Formule (5).]

ϱ' dans (5), on a $\limsup_{n=\infty} l_n = \infty$. Alors, on peut répéter le procédé qui a été employé pour démontrer (g_1).

Passons maintenant aux fonctions d'ordre zéro. La représentation asymptotique, obtenue dans I: B, nous donne pour $f(z)$

$$\log \overline{M}(r) = \frac{(N+\theta)\ \psi(N+\theta)}{1+l}\ [1+\varepsilon(N)].$$

Ce résultat et la remarque ci-dessus nous ont amenés à énoncer le théorème suivant.

Si l'on a $r_n < e^{a(n)^{1+\varepsilon}}$ *pour tout* $n > n_0$ *et* $r_n > e^{a(n)}$ *pour une infinité de valeurs de n, l'inégalité*

$$(h_1) \qquad N < \varrho_m(r)\ \lambda(r)\ \sqrt{1+l}\ \log M(r)\ (1+\varepsilon)$$

est vérifiée pour des valeurs indéfiniment croissantes de r: d'autre part, si $r_n > e^{a(n)^{1-\varepsilon}}$ *pour tout* $n > n_0$ *et* $r_n < e^{a(n)}$ *pour une infinité de valeurs de n, on a pour des valeurs indéfiniment croissantes de r l'inégalité*

$$(h_2) \qquad N > \varrho_M(r)\ \lambda(r)\ \sqrt{1+l}\ \log M(r)\ (1-\varepsilon),$$

N désignant le nombre des zéros dont le module est inférieur ou égal à r, $\varrho_m(x)$ *et* $\varrho_M(x)$ *signifiant les fonctions définies dans I: A et* $a(x)$ *et* $\lambda(r)$ *les fonctions définies dans I: B.*

Démontrons d'abord l'inégalité (h_1).

Posons $r_n = e^{\gamma_n a(n)}$. Nous distinguerons deux cas suivant la valeur de $\limsup_{n=\infty} \gamma_n$.

Premier cas. $\limsup_{n=\infty} \gamma_n = \gamma$; $\gamma \geq 1$ *et fini.*

En posant

$$r_n = l_n \cdot e^{(\gamma-\varepsilon)\ a(n)},$$

il est évident que $\limsup_{n=\infty} l_n = \infty$.

Alors, on peut trouver une suite illimitée de n, N_1, N_2, . . N_p, . . ., tels que $l_n \leq l_{N_p}$ pour tout $n \leq N_p$. Nous avons dès lors

$$r_n \leq l_{N_p} \cdot e^{(\gamma-\varepsilon)\,\alpha(n)} \text{ pour tout } n \leq N_p.$$

Par suite, en choisissant

$$r = l_{N_p} \cdot e^{(\gamma-\varepsilon)\,\alpha(N_p-\theta)} \quad [0 < \theta \leq 1],$$

et en faisant usage du théorème de M. Jensen et de l'égalité (33) dans I,

$$\log\ M(r) > \frac{(\gamma-\varepsilon)\,(N_p-\theta)\,\psi(N_p-\theta)}{1+l}\,[1+\varepsilon(N_p)].$$

De là

$$N_p - 1 < \frac{(1+l)\,[1+\varepsilon(N_p)]}{(\gamma-\varepsilon)\,\psi(N_p-\theta)}\,\log\ M(r).$$

Par des développements analogues à ceux-là faits aux pages 33—34, on trouvera que l'inégalité (h_1) est vraie pour $N = N_p - 1$.

Deuxieme cas. $\limsup_{n=\infty}\ \gamma_n = \infty$.

On peut toujours trouver une suite illimitée de n, N_1, N_2, ... N_p . . ., telle que $\gamma_n \leq \gamma_{N_p}$ pour tout $n < N_p$.

En posant

$$r = e^{\gamma_{N_p}\,\alpha(N_p-\theta)} \quad [0 < \theta \leq 1],$$

nous trouvons de la même manière que dans le premier cas

$$N_p - 1 < \frac{(1+l)\,[1+\varepsilon(N_p)]}{\gamma_{N_p}\,\psi(N_p-\theta)}\,\log\ M(r).$$

Comme $\gamma_{N_p} < \alpha(N_p)^{\varepsilon}$, nous pouvons faire de nouveau les développements, effectués aux pages 33—34. Donc, nous reconnaissons l'exactitude de l'inégalité (h_1) pour $N = N_p - 1$ encore dans ce cas.

Passons ensuite à l'inégalité (h_2).

Posons $r_n = e^{\gamma' n^{\alpha(n)}} = e^{\gamma_n \alpha(n)^{1-\varepsilon}}$. Ici encore, nous distinguerons deux cas suivant la valeur de $\liminf_{n=\infty} \gamma'_n$.

Premier cas. $\liminf_{n=\infty} \gamma'_n = \gamma'$; $0 < \gamma' \leq 1$.

En posant

$$r_n = l_n \cdot e^{(\gamma'-\varepsilon)\,\alpha(n)} = \delta_n \cdot e^{(\gamma'+\varepsilon)\,\alpha(n)},$$

nous aurons $\lim_{n=\infty} l_n = \infty$ et $\liminf_{n=\infty} \delta_n = 0$.

Le quotient de $e^{(\gamma'+\varepsilon)\,\alpha(x)}$ par $e^{(\gamma'-\varepsilon)\,\alpha(x)}$ croît évidemment avec x. Par suite, en répétant le raisonnement à la page 66, on peut trouver une suite illimitée d'indices ν tels que $l_\nu \leq l_n$ pour tout $n \geq \nu$ et $\delta_\nu \leq \delta_n$ pour tout $n \leq \nu$.

Posons alors

$$r = l_\nu e^{(\gamma'-\varepsilon)\,\alpha(\nu+\Theta)} = \delta_\nu \cdot e^{(\gamma'+\varepsilon)\,\alpha(\nu+\Theta_1)}, \qquad 0 \leq \left\{ \begin{matrix} \Theta \\ \Theta_1 \end{matrix} \right\} < 1.$$

De la même manière que dans la démonstration de l'inégalité (g_2), nous trouverons

$$M(r) < \frac{r^\nu}{\delta_\nu^\nu e^{(\gamma'+\varepsilon)\sum_1^\nu \alpha(n)}} \prod_1^\nu \left(1 + \frac{l_\nu e^{(\gamma'-\varepsilon)\,\alpha(n)}}{r}\right) \prod_{\nu+1}^\infty \left(1 + \frac{r}{l_\nu e^{(\gamma'-\varepsilon)\,\alpha(n)}}\right)$$

d'où, en tenant compte de la représentation asymptotique de $f(z)$, effectuée dans I: B,

$$\log M(r) < \frac{(\gamma'+\varepsilon)\,(\nu+\Theta_1)\,\psi(\nu+\Theta_1)}{1+l}\,[1+\varepsilon(\nu)]$$

d'où

$$\nu = \frac{(1+l)\,[1+\varepsilon(\nu)]}{\psi(\nu+\Theta)\,(\gamma'+\varepsilon)} \log M(r). \tag{14}$$

Or, $\dfrac{\log x}{\alpha(x)}$ étant une fonction décroissante, on aura toujours

$$\varrho_M(r) < \frac{\log \nu(1+\varepsilon')}{(\gamma'+\varepsilon)\,\alpha(\nu)}.$$

De plus, en vertu des propriétés de $\alpha(x)$, on peut déduire (par des développements analogues à ceux-là faits aux pages 33—34)

$$\frac{\alpha(\nu)\sqrt{1+l}}{\psi(\nu+\theta)\log\nu} > \lambda(r)(1-\varepsilon').$$

Par suite, l'égalité (14) se réduit à

$$\nu > \varrho_M(r)\,\lambda(r)\sqrt{1+l}\log M(r)(1-\varepsilon), \tag{15}$$

et l'inégalité (h_2) est démontrée dans le premier cas.

Deuxieme cas. $\liminf_{n=\infty} \gamma'_n = 0$.

Nous pouvons toujours supposer que $\lim \gamma_n = \infty$. Par suite, la fonction $\alpha(x)^\varepsilon$ croissant, on peut trouver comme plus haut une suite illimitée d'indices ν tels que $\gamma'_\nu \leq \gamma'_n$ pour $n \leq \nu$ et $\gamma_n \geq \gamma_\nu$ pour $n \geq \nu$.

Posons ensuite

$$r = e^{\gamma'_\nu \alpha(\nu+\Theta)} = e^{\gamma_\nu \alpha(\nu+\Theta_1)^{1-\varepsilon}} \qquad 0 \leq \left\{ \begin{matrix} \theta \\ \theta_1 \end{matrix} \right\} < 1.$$

La fonction $\alpha(x)^{1-\varepsilon}$ vérifiant, elle aussi, les conditions imposées à $\alpha(x)$ [sauf pour $\alpha(x) < (\log x)^{1+\varepsilon'}$], nous obtiendrons de la même manière que dans le cas précédent

$$\nu = \frac{(1+l)[1+\varepsilon(\nu)]}{\psi(\nu+\theta)\gamma'_\nu}\log M(r). \tag{14'}$$

Or, $\dfrac{\log x}{\alpha(x)^{1-\varepsilon}}$ étant une fonction décroissante et $l_\nu \leq l_n$ pour $\nu \leq n$, on aura $\dfrac{\log \nu}{\log r_\nu} > \dfrac{\log n}{\log r_n}$ pour tout $n > \nu$.

Par conséquent

$$\varrho_M(r) = \frac{\log \nu}{\alpha(\nu)\gamma'_\nu}.$$

Comme $\gamma'_\nu > [\alpha(\nu)]^{-\varepsilon}$, on trouvera encore

$$\frac{\alpha(\nu)\sqrt{1+l}}{\psi(\nu+\theta)\log\nu} > \lambda(r)(1-\varepsilon').$$

Donc, nous arriverons de nouveau à l'inégalité (15) et l'inégalité (h_2) se trouve démontrée aussi dans ce cas. Le théorème énoucé est ainsi exact.

Ce théorème est applicable pour toutes les fonctions où l'on a $e^{(\log n)^{\varepsilon}} < r_n < e^{n^C}$, C arbitrairement grand mais fini.

Traitons maintenant les fonctions pour lesquelles le théorème ci-dessus sera en défaut et considérons d'abord le cas où $r_n < e^{(\log n)^{\varepsilon}}$. *Je dis que les inégalités* (h_1) *et* (h_2) *subsistent encore pour ces fonctions si l'on pose* $\lambda(r) = 1$.

En ce qui concerne (h_1), nous pouvons prendre toujours $r_n = l_n \cdot n^{\overline{\varrho_{m(r_n)}}^{\frac{1}{(1+\varepsilon)}}}$, en même temps qu'ait lieu $\limsup_{n=\infty} l_n = \infty$. Donc, on peut procéder comme dans les cas correspondants qui précèdent, et nous serons amenés à l'inégalité (h_1).

Pour faire voir l'exactitude de (h_2), nous posons

$$r_n = n^{\delta_n (\log n)^{\varepsilon}} = n^{\overline{\varrho_{M(r_n)}}^{\gamma_n}}. \qquad [\gamma_n \geq 1]$$

Il est évident que $\liminf_{n=\infty} \delta_n = 0$. Par suite, on peut trouver uue suite illimitée d'indices, $N_1, N_2, \ldots N_p, \ldots$ tels que $\delta_n \leq \delta_{N_p}$ pour tout $n \leq N_p$. En vertu de la construction de $\varrho_M(x)$, on reconnaîtra aussi que $r_{N_p} = N_p^{\overline{\varrho_{M(r_{N_p})}}^{\frac{1}{}}}$ pour tout p.

En prenant alors

$$r = N_p^{\delta_{N_p}[\log (N_p + \Theta)]^{\varepsilon}} \quad [0 \leq \theta < 1],$$

on trouvera

$$M(r) < \prod_1^{N_p} \left(\frac{r}{e^{\delta_{N_p} (\log n)^{1+\varepsilon}}} + 1 \right) \prod_{N_p+1}^{\infty} \left(1 + \frac{r}{\overline{n^{\varrho_M(r_{N_p})}}^{1}} \right),$$

et des évaluations habituelles nous donnent l'inégalité (h_2) pour $N = N_p$.

Enfin, regardons les fonctions où l'on a $r_n > e^{n^C}$, C arbitrairement grand. Avant de poser les inégalités que nous

avons en vue pour ces fonctions, remarquons que, *ayant lieu* $a(x) = x^l$, on peut écrire les inégalités (h_1) et (h_2) de la manière suivante:

$$(h_1') \qquad N > \frac{\log M(r)}{\log r}\left(1 + \frac{1}{l}\right)(1+\varepsilon)$$

et

$$(h_2') \qquad N > \frac{\log M(r)}{\log r}\left(1 + \frac{1}{l}\right)(1-\varepsilon).$$

Pour $l = \infty$, ces inégalités se réduisent à

$$(h_1'') \qquad N < \frac{\log M(r)}{\log r}(1+\varepsilon)$$

et

$$(h_2'') \qquad N > \frac{\log M(r)}{\log r}(1-\varepsilon),$$

inégalités que vérifient les fonctions ci-dessus pour des valeurs indéfiniment croissantes de r.

Pour démontrer cela, posons

$$r_n = e^{n^{\gamma_n}}.$$

Alors on a $\lim_{n=\infty} \gamma_n = \infty$. Par suite, on peut trouver deux suites illimitées d'indices, $N_1, N_2, \ldots N_p \ldots$ et $M_1, M_2, \ldots M_p, \ldots$ tels que $\gamma_n \leq \gamma_{N_p}$ pour tout $n \leq N_p$ et que $\gamma_n \geq \gamma_{M_p}$ pour tout $n \geq M_p$.

Pour

$$r = e^{(N_p - \Theta)^{\gamma_{N_p}}} \quad [0 < 0 \leq 1]$$

on montre facilement l'inégalité (h_1''), et pour

$$r = e^{(M_p + \Theta)^{\gamma_{M_p}}} \quad [0 \leq \theta < 1]$$

encore l'inégalité (h_2'').

Errata.

Page	ligne	au lieu de	lisez
28	11	moins	égal